〈報文〉

トラス構造最適設計プログラムの開発

北海道職業能力開発短期大学校　　寺　島　周　平

A Computer Program for Optimization Design of Truss Structures

Syuhei TERASHIMA

要約　最近の汎用ＣＡＥでは設計の要求仕様から設計案を導く構造最適化機能が実用化されつつある。最適設計手法を用いることによって、経験と勘が頼りであった分野の設計プロセスを大幅に効率化することができる。本報告ではトラス構造としてモデル化される構造物の重量最小化設計問題を対象としたプログラムの開発を行い、数値計算によりその実用性を検討した。プログラムは小規模でモジュール化されているため、教育訓練用としても有用である。

I　緒言

計算機能力の飛躍的な発展により、有限要素法を中心とした汎用CAEプログラムが機械構造物の強度解析あるいは、振動解析に適用され、設計コストの軽減や、製品の高品質化が図られるようになった。しかし、大部分の設計業務においてCAEは、複数の設計案から構造、振動解析などを行うために利用されており、設計者はその結果をもとにして修正、変更を繰り返しているのが現状である。

汎用ＣＡＥには、要求仕様から最適設計案を導く最適化機能が組み込まれている場合が多い。しかしながら、これらのプログラムの中には、最適解ですべての部材が強度限界で使用される全応力設計を用いた最適化を行うものがある。全応力設計は各部材の応力がその制限値に達したものが最適解であるとされる手法である。不静定構造の場合、この方法による解はほぼ最適解に近い設計となることが工学的な経験によりわかっているだけで、必ずしも最適解に収束するという保証はない。そのため、全応力設計は一部問題を除いて実用性に欠けると思われる。

また、ソースコードが公開されており、解読が容易な最適設計プログラムがほとんどみられないため、設計者が理論的な内容を把握することも困難である。

本報告ではこのような状況を踏まえ、著者が開発したトラス構造の重量最小化設計プログラムの概要と適用例を報告する。プログラムは、32ビットパーソナルコンピュータ上で運用することができ、有限要素法による構造解析と直接微分法による構造感度解析を基礎として、応力および変位制約条件のもとで、トラス構造の重量最小化設計を行うことができる。

プログラムは、Fortran77で記述されているため、設計者が専用プログラムを開発するに当たってのひな型として利用することも可能である。設計者がこのようなプログラムの内容を把握することによって、最適設計の導入による設計コスト削減が果たせるものと考えられる。プログラムは、単に教育用だけでなく現実問題にも十分適用できるので、結果として実用的な知識が得られることになる。

ここでは、最初に一般的な構造最適化問題の定式化についての知識を整理する。さらに、開発した重量最小化設計プログラムを具体的な設計例へ適用した結果

論文受付日　Ｈ６．10．11

について報告する。

II　構造最適化問題の定式化

1．一般的な構造最適化問題の構成

設計パラメータを与えたとき応力や変位の制約関数値を求めるために、有限要素法を用いた構造解析を行う。有限要素法による構造解析は線形静解析を対象とする。いま、有限要素法の平衡方程式は(1)式のように表すことができる。

$$[K]\{U\}=\{R\} \qquad (1)$$

$[K]$は剛性行列、$\{U\}$は変位ベクトル、$\{R\}$は外荷重ベクトルである。剛性行列と変位ベクトルは設計変数ベクトルの関数であるが、外荷重ベクトルは設計変数に無関係であるから、(1)式の両辺を設計変数ベクトル の要素で偏微分して(2)式に示す構造感度方程式を導くことができる。

$$[K]\left\{\frac{\partial U}{\partial X_i}\right\}=-\left[\frac{\partial K}{\partial X_i}\right]\{U\} \qquad (2)$$

構造解析により得られた変位、部材応力及び、(2)式をもとに求められる変位と部材応力の導関数より、設計変数をわずかに変更したときの変位および応力を予測することができる。

設計変数ベクトルの上下限をX^U, X^L, 目的関数を$f(X)$, j番目の非線形制約条件を$g_j(x)$とすると、一般化された非線形計画問題を(3)式のようにあらわすことができる。ここでは上下限制約条件式を非線形制約条件と区別する。非線形制約条件の総数をm個、設計変数の総数をn個とする。

$$\begin{aligned}&\mathit{min\,imize}\ \ f(X)\\&\mathit{subject\ to}\ \ g_j(X)\leqq 0\quad j=1,m\\&\qquad X_i^L\leqq X_i\leqq X_i^U\quad i=1,n\end{aligned} \qquad (3)$$

目的関数$f(X)$はXの非線形関数であるとする。トラス構造の最適設計において、設計変数として部材断面積をとる場合、一般的には変位と応力の制約条件式は非線形になる。目的関数と非線形制約条件式を現在の設計点X^0のまわりで、一次の導関数の項までテイラー展開し、上下限制約に適当なﾑｰﾌﾞﾘﾐｯﾄを課した近似最適化問題を(4)式のように構成する。

$$\begin{aligned}&\mathit{min\,imize}\quad (X-X^0)\cdot\ f(X^0)\\&\mathit{subject\ to}\ \ g_j(X^0)+(X-X^0)\cdot\ g_i(X^0)\leqq 0\ \ j=1,n\\&\qquad X_i^L\ \ X_i\ \ X_i{}^U\quad i=1,n\end{aligned} \qquad (4)$$

(4)式は、逐次線形計画法（Sequential Linear Programming）などにより最適解を求めることができる。これらの最適化手法は線形近似による誤差はあるものの、一次元探索を必要としないため、これまで広く用いられてきたLagrange乗数法やペナルティ関数法に比べて、現実的な時間内に最適解を得ることができる。

2．トラスの重量最小化設計問題

これまでに剛性最大化や重量最小化、あるいは望ましい変形状態などの、評価関数のコンピュータインプリメンテーションが可能であるような構造最適化が試みられている。実際の設計では多くの要素を含んでいるため、重量最小化だけが設計目標とはならない。しかし、設計対象の軽量化が要求の中で非常に重要な場合、重量最小化問題による設計案を第一案とすることができる。

材質と構造配置が変化しないne本のトラス構造を考える。トラス要素の部材断面積をAn, 部材長さをLn, 密度をγとおくと、部材総重量wは、(5)式のように表すことができる。

$$w=\sum_{n=1}^{ne}\gamma A_n L_n \qquad (5)$$

節点変位をU, 変位の上下限制約値をU^U, U^Lとおくと、変位の制約条件は(6)式のようになる。

$$U^L\leqq U\leqq U^U \qquad (6)$$

部材応力をσ, 応力の上下限をσ^U, σ^Lとおくと、応力の制約条件式は(7)式で表すことができる。

$$\sigma^L\leqq\sigma\leqq\sigma^U \qquad (7)$$

例えば(7)式において$\sigma^U>0$が成り立つとき、応力の上限に対するj番目の挙動制約条件式を(8)式のように正規化することができる。

$$g_j(X)=\frac{\sigma}{\sigma^U}-1 \tag{8}$$

小さい定数 ε に対して(9)式が成り立つとき、最適解が得られたものとして計算を終了する。

$$\min_i \left|\frac{X_i - X_i^0}{X_i}\right| \leqq \varepsilon \tag{9}$$

III　プログラムの構成と機能

プログラムは有限要素法による構造解析モジュール、設計変数の変化による変位と応力の構造応答を出力する感度解析モジュール、および最適化問題の定式化を行う最適化モジュールに分割されている。図１にプログラムの構成図を示す。有限要素法による構造解析は、SAPⅣをブラックボックスとして利用した。(2)式右辺を荷重ベクトルとみなしてSAPⅣの入力データとすることによって、構造感度方程式の解をSAPⅣの変位出力として得ることができる。設計変数及び挙動制約条件のグループ化、アクティブな挙動制約条件の選択機能を付加し、設計変数と制約条件式の総数を減少させることを図った。また、設計変数の逆変数の取り扱いを導入することにより、挙動制約条件の線形近似による可能領域からの逸脱を防ぐ機能をもたせた。非線形計画法ライブラリには、目的関数、制約条件を現在の設計点のまわりでTaylor展開した近似LP問題を設計変数の変域を制限する移動制約条件を付加して反復する逐次線形計画法を採用した。

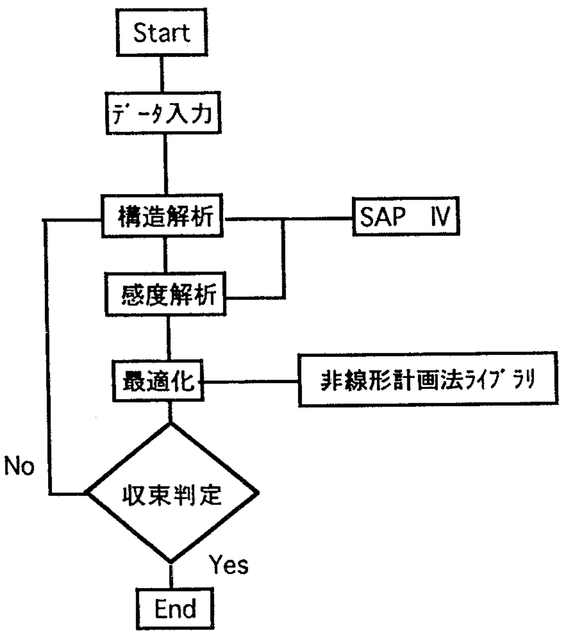

図１　プログラム構成図

Ⅳ　数値計算例

本章では先に応力、変位制約条件のもとで行ったトラス構造の重量最小化設計の数値計算例を以下に示す。

１．３部材平面トラス

図２に示す３本部材の平面トラスの数値計算例を以下に示す。設計変数を部材番号(1)から(3)の断面積として選択し、部材(1)の初期値を1.0㎠，それ以外の部材の初期値を2.0㎠とする。ヤング率E＝207GPa，密度 $\gamma=7.9\times10^{-3}$kg/㎤とする。応力の上下限値はすべての部材について、それぞれ0.14GPa, -1.0GPaとする。また、全ての設計変数の上下限を100.0㎠，0.01㎠であると仮定する。図３には目的関数の履歴を示した。図４に横軸に設計段階を、縦軸に部材断面積をとり、設計変数の履歴を示す。最適解では、部材(3)の応力制約条件が引張応力としてアクティブになる。現在のプログラムでは部材(1)および(2)は、剛性の維持に寄与しないことになる。トラス部材の座屈応力に関する制約条件の取り扱いは今後の課題としたい。

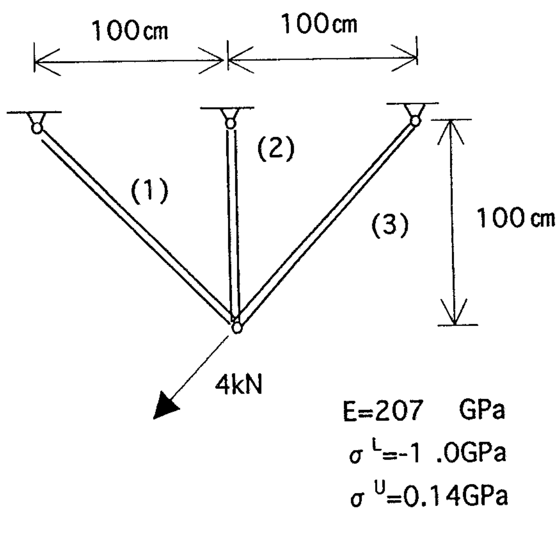

図２　３部材トラス

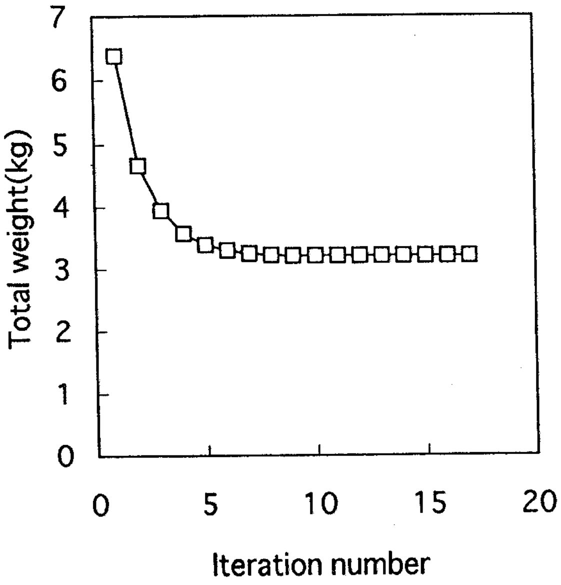

図３　目的関数の変化

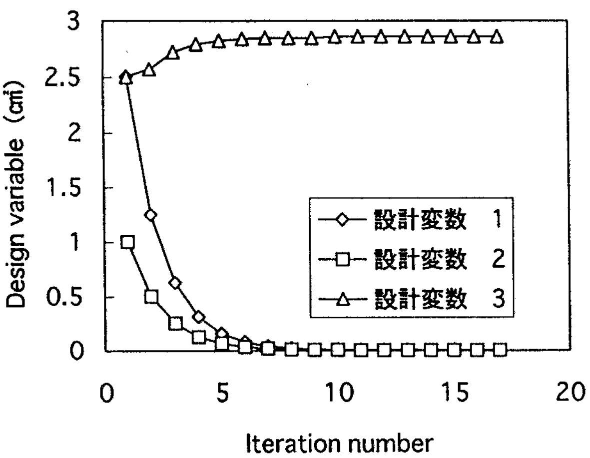

図４　設計変数の変化

２．５部材平面トラス

図５に示す５本部材の平面トラスの最適設計を行った。座標系としては節点４から節点２に向かう部材(2)に平行にｘ軸を、節点２から１に向かう部材(3)の向きにｙ軸をとる。設計変数を部材番号(1)から(5)の断面積として選択するとき、各初期値を20cm²とする。ヤング率E＝10MN/cm²，密度γ＝0.1kg/cm³とする。応力の上下限値はすべての部材について、それぞれ、±2.5kN/cm²とする。また、設計変数の上下限を50.0cm²，0.1cm²であると仮定する。図６には目的関数の履歴を示した。図７に横軸に設計段階を、縦軸に部材断面積をとり、設計変数の履歴を示す。最適解では、部材(2)，(5)の応力制約条件がアクティブになり、部材(2)の応力が下限値に、部材(5)の応力が上限値に近づく。

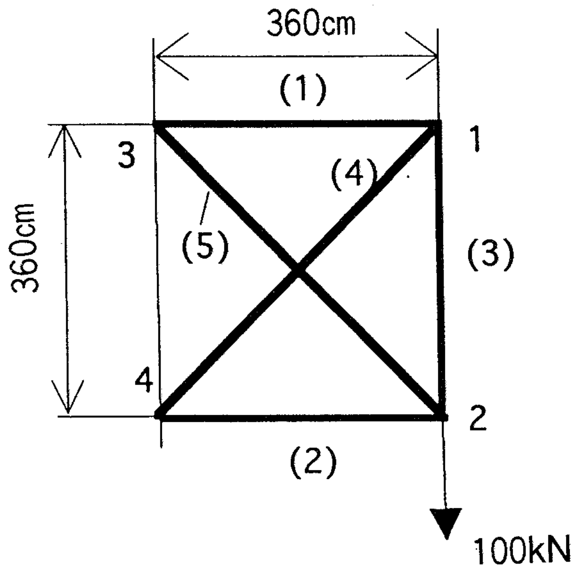

図５　５部材平面トラス

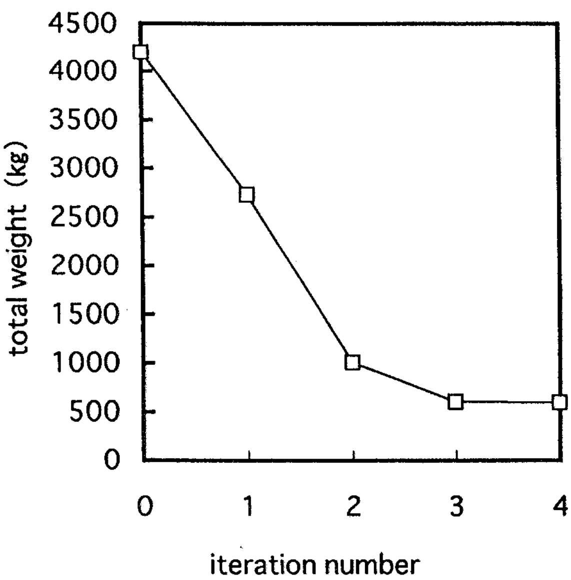

図６　目的関数の変化

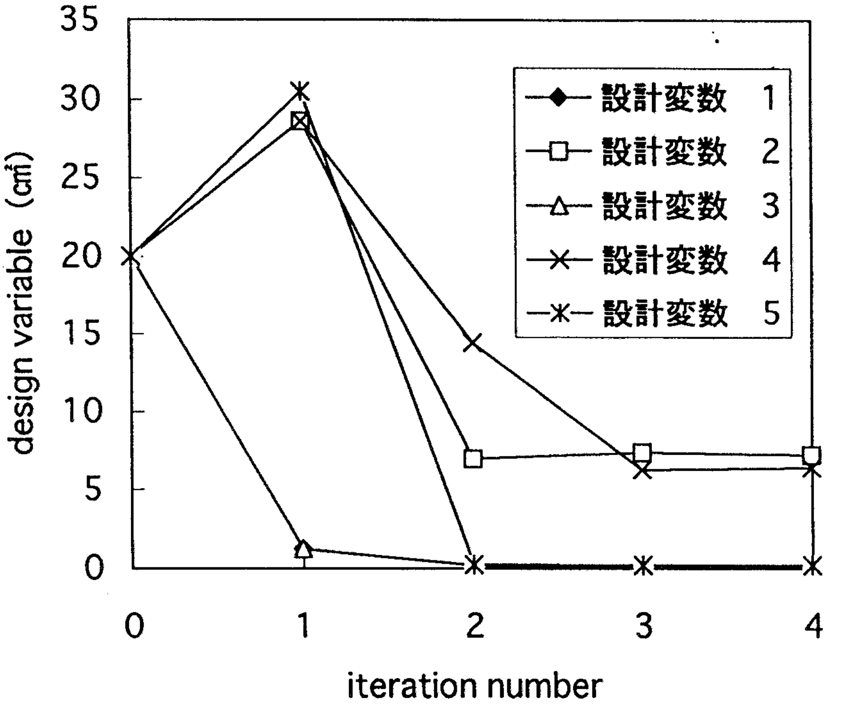

図7　設計変数の変化

V　まとめ

本報告ではトラス構造を対象とする重量最小設計プログラムの概要と数値計算例を示した。得られた最適解は力学的にも妥当であり、プログラムの有効性を確認することができた。また最適化手法として、少ない構造解析の回数でも工学的に有用な最適解が得られる線形近似法が有効であることを示すことができた。

[参考文献]

(1) G. N. Vanderplaats, Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications, McGraw-Hill, 1984

(2) J. E. Kelley, The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs, J. SIAM, vol. 8, 702-712, 1960

(3) K. J. Bathe, E.L.Wilson,F.E.Peterson, SAP ⅣA Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems, Report No. EERC 73-11 Berkeley, UC 1973

(4) G. N. Vanderplaats, N. Yoshida, Efficient Calculation of Optimum Design Sensitivity, AIAA J. Vol. 23, No. 11, 1798-1803, 1985