

# シーソシステムの安定化制御

千葉職業能力開発短期大学校 菊地 功・木口 基久

## Study of an Experiment Apparatus of Seesaw System

Isao KIKUCHI、Motohisa KIGUCHI

**要約** 現代制御理論を用いた自動制御の実験用教育機器はそう多くはない。シーソシステムそのものは不安定制御系であり、現代制御の実験教材としては代表的な教材であろう。筆者らは現有するパソコンをコントローラとして使い、簡単な自動制御であるシーソシステムの安定化実験が行える教材を作成した。精度は二の次にして出来る限り簡単な方法で上手く実験が出来ないかを模索した。

この教材を用いて自動制御の設計から評価までを実験できる教材にするのが当面の課題である。

## I はじめに

シーソシステムの安定化は現代制御理論ではレギュレータと呼ばれており、代表的な不安定制御系である。現代制御の理解を深めるためにシーソシステムの教材を自作し、安定化の実験を行ったのでその概要を報告する。

## II 状態方程式

### 1. 制御対象と制御の目的

制御対象は図1に示すようなシーソシステムである。その構成は透明なアクリル製の円筒（以下、シーソという）とその中心軸に取り付けた直流サーボモータおよび、シーソの中に挿入した鉄球（以下、ボールという）の3つから成っている。

制御の目的は振動等によりボールがシーソの中心からずれたときシーソはボールのずれた方向に傾くが、シーソの傾きとは逆方向にモータを回転させて、ボールがシーソ中心に戻るようモータを制御することである。

### 2. 数式モデル

図2においてボールがシーソ中心から僅少  $r$  だけずれた結果シーソが水平から僅少  $\theta$  だけ傾いたとすると

シーソシステムの運動方程式は

$$M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + Mgsin\theta + \xi\dot{r} = 0 \quad (1)$$

$$(J + Mr^2)\ddot{\theta} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} + Mgrcos\theta + \eta\dot{\theta} = u \quad (2)$$

式(1)、(2)で示される。

また平衡点を  $\theta = 0$ 、 $r = 0$  として平衡点の近傍で線形近似を行い、ボールとシーソとの摩擦  $\xi$  を無視すると式(1)、(2)は式(3)、(4)となる。

$$M\ddot{r} + Mg\theta = 0 \quad (3)$$

$$J\ddot{\theta} + Mgr + \eta\dot{\theta} = u \quad (4)$$

式中の記号は次の通りである。

$M$ [kg] ボールの質量  $\theta$ [rad] シーソの角度

$r$ [m] 軸中心からのボールの距離

$u$ [N·m] モータの発生トルク

$\xi$ [kg/s] ボールとシーソとの摩擦係数

$\eta$ [kg·m<sup>2</sup>/s] 回転軸の摩擦係数

$g$ [m/s<sup>2</sup>] 重力加速度

$J$ [kg·m<sup>2</sup>] シーソ中心軸回りの慣性モーメント

ここで、状態変数  $x$  を  $(4 \times 1)$  の行列

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

と置き、(3)、(4)式を行列で表現すると次のような状態

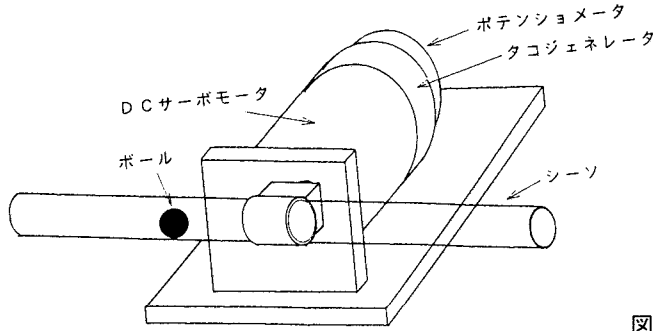


図1 シーソシステム

方程式をうる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} u \quad (6)$$

(6)は一般に次式のように表される。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (7)$$

但し、式の行列をそれぞれ次のようにおく。

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

行列の要素は次の通りである。

$$a_{32} = -g \quad a_{41} = -\frac{Mg}{J} \quad (11)$$

$$a_{44} = -\frac{\eta}{J} \quad b_4 = -\frac{1}{J} \quad (12)$$

出力方程式は

$$y = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

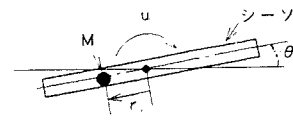


図2 ボールMがrだけ動いた結果シーソがθだけ傾く。モータトルクuは矢印の方向に動いてMを戻す

となる。また、 $c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  とおくと上式は

$$y = cx \quad (14)$$

と表される。

次に、観測できる出力はシーソの角度  $\theta$  [rad] と角速度  $\dot{\theta}$  [rad/s] でありこれらの値はポテンシオメータとタコジェネレータを用いて電圧値として求められる。それらの変換係数をそれぞれ  $c_1, c_2$  とする。

また、パワーアンプを介してサーボモータに加える電圧を制御入力電圧  $v$  [V] とすると、制御入力電圧  $v$  とモータの発生トルク  $u$  の関係は図3 (a) のようになっており、モータ軸に摩擦があるため不感帯が存在している。

$v$  が正の場合は

$$u = a_1 \cdot v - b_1 \quad (15)$$

とおき、 $v$  が負の場合は

$$u = a_2 \cdot v + b_2 \quad (16)$$

とおいて、制御入力電圧  $v$  に対するシーソに働くトルクを測定して図3 (a) を得る。

この結果より係数  $a_1, a_2, b_1, b_2$  を求める。シーソは左右対称であるため

$a_1 = a_2, b_1 = b_2$  となる。それぞれの係数を改めて  $a, b$  とする。

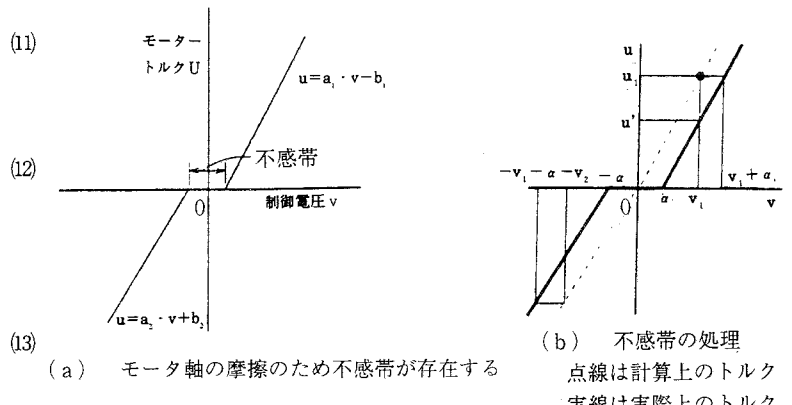


図3 制御電圧  $v$  とモータトルク  $u$  との関係

不感帯の処理は以下のようにしている。図3 (b)において計算上のトルク $u_1$ を発生するための電圧は $v_1$ であるが、この電圧ではトルクは $u'$ に下がってしまう。この降下分を補うため電圧を $\alpha$ だけ更に $v_1$ に加え、 $v_1 + \alpha$ の電圧をモータに加えている。負の電圧についても同様である。

モータが発生するトルク $u$ は、シーソシステムを安定にさせるだけでなく、状態変数を素早く平衡点に収束させる上で特に重要である。この $u$ は後述する現代制御理論からパソコンにより計算で求められる。

### III パラメータの測定

#### 1. 変換係数 $c_1$ の測定

シーソを水平に保持したときポテンシオメータの電圧が零になるようにポテンシオメータを調整する。シーソを任意の角度に回転したときのシーソの角度とポテンシオメータの電圧を測定する。図4に示すような直線の勾配から $c_1$ を求める。

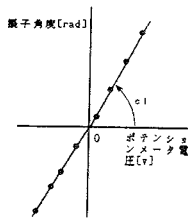


図4  $c_1$ の求め方 ●は測定点

#### 2. 変換係数 $c_2$ の算出

本研究で用いるタコジェネレータは1000[rpm]当たり直流7[V]を発生するのでタコジェネレータの電圧値—角速度の変換係数 $c_2$ は次のようになる。

$$c_2 = \frac{1000 \times 2\pi}{60 \times 7} = 14.96 \text{ [rad/s/v]} \tag{17}$$

#### 3. Jと $\eta$ の測定

図1に示すようなシーソシステムのモータに任意の一定電圧を加え、シーソを一定速度で回転させる。このときシーソの角速度 $\dot{\theta}$ は次の1階の微分方程式で表される。

$$J \frac{d}{dt} \dot{\theta} + \eta \dot{\theta} = aE \tag{18}$$

ここで、 $E$ はモータの印加電圧であり、 $a$ はモータの

電圧—トルク変換係数である。

なお、この $a$ は図3の直線の勾配に等しい。

式(18)の解は式(19)となる。

$$\dot{\theta} = \frac{aE}{\eta} (1 - \exp(-\eta/J)t) \tag{19}$$

上式の $\frac{aE}{\eta}$ はモータ回転数の定常値になるのでこの値を測定することにより $\eta$ が求められる。また、式(19)の時定数 $T = \frac{J}{\eta}$ を実測してこの値から $J$ を求める。パラメータの測定結果を表1に示す。

表1 パラメータの測定値

M [kg]	$66.9 \times 10^{-3}$	g [m/s <sup>2</sup> ]	9.80
a [N·m/v]	0.235	$c_1$ [rad/V]	0.314
J [kgm <sup>2</sup> ]	$3.20 \times 10^{-3}$	$c_2$ [rad/s/V]	14.96
$\eta$ [kgm <sup>2</sup> /s]	0.005712	b [N·m]	$\pm 0.0350$

また、図5はシーソの角速度の時間変化を示したものである。

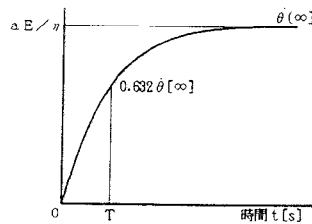


図5 角速度 $\dot{\theta}$ の時間的経過

### IV レギュレータおよびオブザーバの設計

#### 1. 制御系の安定性

$n$ 次元、1入力 $p$ 出力制御システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{20}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{21}$$

$$A (n \times n) \quad b (n \times 1) \quad c (p \times n)$$

において $u=0$ とおいたとき任意初期値 $x(0) \neq 0$ に対して系が安定になる ( $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ) ための必要十分条件は行列 $A$ の全ての固有値の実部が負であることが知られている。即ち、行列 $A$ の固有値を $\lambda_i$ としたとき次式で示される。このとき行列 $A$ を安定行列という。

$$\text{Re} \{ \lambda_i(A) \} < 0 \quad i=1,2,\dots,n \tag{22}$$

### 2. 状態フィードバックゲイン

通常、システム(20)のような制御対象は安定とは限らないので制御入力  $u$  を適切に構成することにより制御系の安定を計る必要がある。そこでシステム(20)に対して入力  $u$  を  $u = -fx$  と構成すると ( $f$  を状態フィードバックゲインという ( $1 \times n$ )) 図6のような閉ループ系となる。図6のような閉ループ系の状態方程式は(23)式で表される。

$$\dot{x}(t) = (A - bf)x(t) \tag{23}$$

もし、 $(A - bf)$  の固有値が(22)式のように  $\text{Re}\{\lambda_i(A - bf)\} < 0$  を満足するように  $f$  を設定することが出来るならば図6の閉ループ系の安定化は可能である。更に固有値を原点から左により大きく設定すると即応性も期待できる。

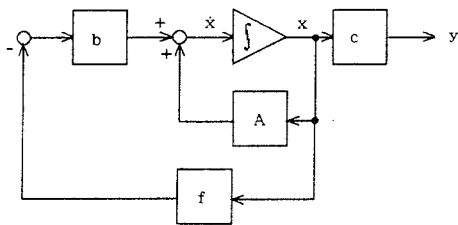


図6 状態フィードバックによる閉ループ制御系

任意に与えられた初期状態を零に収束させる閉ループ制御システムをレギュレータといい  $(A - bf)$  の固有値をレギュレータの極という。ここで、 $(A - bf)$  を安定にする  $f$  を設定できるためには  $(A, b)$  が可制御でなければならない。 $(A, b)$  が可制御であるための必要十分条件は可制御性行列  $U_c$  を

$$U_c = [b, Ab, A^2b \cdots A^{n-1}b] \tag{24}$$

としたとき、 $\text{rank}(U_c) = n$  となることである。この条件は  $b$  が列ベクトルのときは  $|U_c| \neq 0$  と等価である。

本研究ではレギュレータの極を任意に設定できる極配置の手法によりフィードバックゲイン  $f$  を設計した。

### 3. オブザーバ

状態フィードバック制御ではシステムの状態変数が全て測定可能であることが前提であるが、実際のシステムでは全ての状態変数を測定出来る場合は少ない。この制御系ではボールの位置  $r$  とその速度  $\dot{r}$  は測定していない。このような場合に状態フィードバックを実現するためには、測定可能な出力から状態変数を推定する機構が必要となる。このような機構をオブザーバ

という。オブザーバの構成を図7(a)に示す。

システム(20)、(21)からオブザーバを構成するには  $(c, A)$  が可観測でなければならない。 $(c, A)$  が可観測であるための必要十分条件は可観測性行列  $U_o$  を

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{25}$$

としたとき、 $\text{rank}(U_o) = n$  となることである。

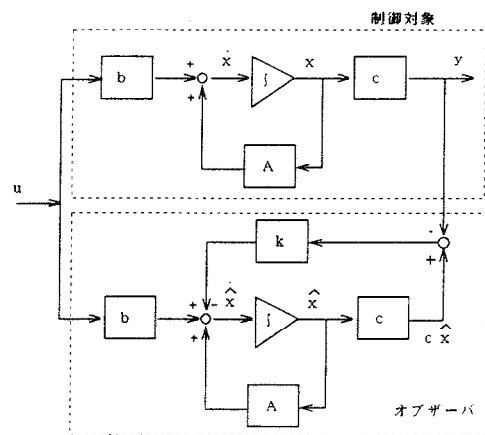


図7(a) オブザーバの構成

このとき、システム(20)、(21)の出力  $y$ 、入力  $u$  を入力信号とする次のようなモデルをつくる。

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = (A - kc)\hat{x}(t) + ky(t) + bu(t) \tag{26}$$

$k(n \times 1)$

上式  $\hat{x}(t)$  のは  $x(t)$  の推定値を意味する。モデル(26)の次元は制御対象と同一の次元である。

$(A - kc)$  が安定行列となるようにゲインベクトル  $k$  を選ぶならば、 $x(0) \neq \hat{x}(0)$  であっても

$t \rightarrow \infty$  で  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  となり状態を推定することができる。

さらに、オブザーバの次数を下げるため新たに次の動的モデルを設定する。

$$\dot{\omega} = \hat{A}\omega + k_y + \hat{b}u \tag{27}$$

$$\hat{x} = \hat{c}\omega + Dy \tag{28}$$

但し、上式の係数間には次の条件が成り立つことが必要である。 $\hat{A}$  は安定行列でありかつ任意の行列  $M$  に

対して(29)が成り立つこと。

$$\hat{A} = MA - kc, \hat{b} = Mb, \hat{c}M + Dc = I \quad (29)$$

このとき $\omega$ は $Mx$ の推定値となる。即ち、 $\hat{A}$ は安定行列であれば、 $t \rightarrow \infty$ で $\omega \rightarrow Mx$ となり、また、 $\hat{x} \rightarrow x$ となる。(29)を満足する $M$ を見いだすにはGopinathの設計法が知られている。このオブザーバは最小次元オブザーバと呼ばれ、図7(b)に示される。

オブザーバの次数は出力の数だけ下げられる。

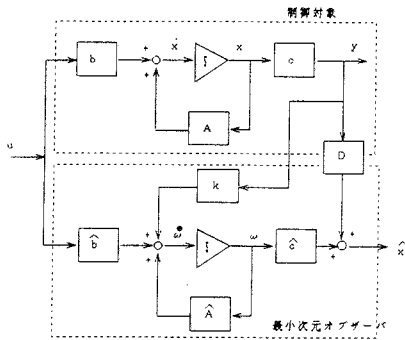


図7(b) 最小次元オブザーバの構成

オブザーバを設計するとき状態の推定値 $\hat{x}(t)$ の収束がレギュレータの収束より速くする。即ち、オブザーバの極(図7(a)では $(A - kc)$ 、同図(b)では $\hat{A}$ )をレギュレータ $(A - bf)$ の極より左側に位置するようにそれぞれの極を設定する。

本研究のオブザーバはGopinathの最小次元オブザーバ(2次)を用いて設計した。図8は状態フィードバックと最小次元オブザーバを組み合わせた状態変数線図を示したものである。

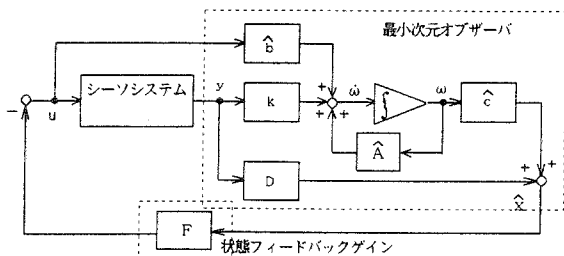


図8 状態フィードバックとオブザーバを組み合わせた状態変数線図

また、オブザーバはコンピュータで処理するためオブザーバの変数および係数行列は離散時間系とする必要がある。本研究ではオブザーバを連続時間系で設計した後、オイラーによる一次近似を用いてサンプリング周期 $T = 5[\text{ms}]$ で離散化した。

## V 安定化制御の実験

### 1. 係数行列と系の可制御、可観測

表1のパラメータの測定値から連続時間における係数行列を求めた結果を以下に示す。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ -204.8 & 0 & 0 & -1.785 \end{bmatrix} \quad (4 \times 4) \quad (30)$$

$$b = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 312.5]^T \quad (2 \times 1) \quad (31)$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1 \times 2) \quad (32)$$

行列Aの固有値は

$$-7.189 \quad -0.4423 \pm j6.649 \quad 6.289 \quad (33)$$

となり、固有値の実数部に正の値が含まれるからこの制御系は不安定である。

一方、 $(A, b)$ の可制御については

(26)式より可制御性行列 $U_c$ は

$$U_c = [b \quad bA \quad bA^2 \quad bA^3] \quad (34)$$

であるから

$$U_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3.062 \\ 0 & .3125 & -.5578 & .9957 \\ 0 & 0 & -3.025 & 5.467 \\ .3125 & -.5578 & .997 & -1.778 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (35)$$

となる。また、ランクは $\text{rank}(U_c) = 4$ となり、 $(A, b)$ は可制御。よって、任意のフィードバックベクトル $f$ が設定可能となる。さらに、 $(c, A)$ の可観測は式(27)より可観測性行列 $U_o$ は

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ cA^3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

であるから

$$U_o = \begin{bmatrix} 0 & .0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .0010 \\ 0 & 0 & 0 & .0010 \\ -2.049 & 0 & 0 & -.0018 \\ -2.049 & 0 & 0 & -.0018 \\ .3657 & 0 & -.2049 & .0032 \\ .3657 & 0 & -.2049 & .0032 \\ -.6528 & 2.007 & .3657 & -.0057 \end{bmatrix} \quad (37)$$

となる。ランクは $\text{rank}(U_o) = 4$ であるから $(c, A)$

は可観測。よって、オブザーバの構成が可能となる。

## 2. 実験結果

自作教材を使用して次の項目について実験した。オブザーバの極を-10 -10に設定。サンプリング時間  $T$  を  $T = 5$  [ms]。角度とボールの位置のスケールは  $\pm 10^\circ$ 、 $\pm 0.3$  [m]。レギュレータの極を  $\lambda$  とする。

①外乱（シーソを指で突く）を与えたときの安定性  $\lambda = -2 -2 -2 -2$

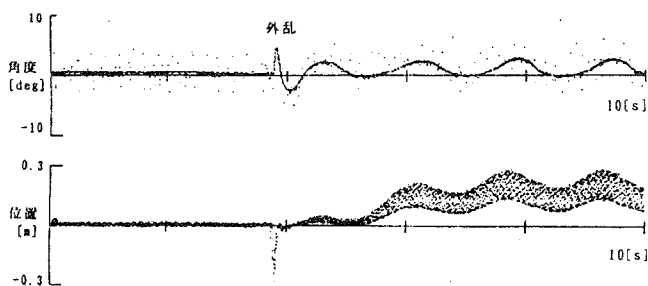


図9  $\lambda = -2 -2 -2 -2$ としたときの安定性

図9は安定に動作しているときシーソを指で突くなどの外乱を与えたときのシーソ、ボールの挙動を示したものである。外乱を与えても元の状態に復帰することがわかる。しかし、戻りが緩慢である。

②レギュレータの極  $\lambda$  を変えたときの安定性

$$\lambda = -4 -4 -4 -4$$

シーソ、ボールの戻りがレギュレータの極を①より遠くにした分だけ俊敏になるが振動が大きくなる。

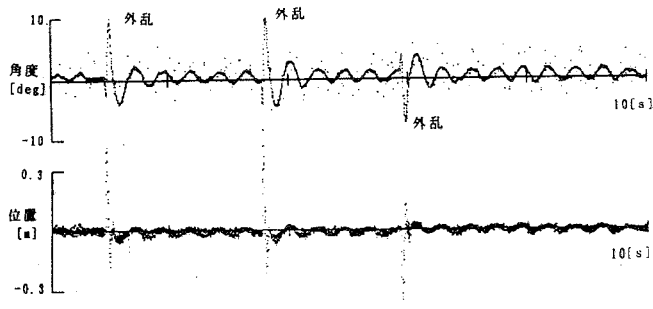


図10  $\lambda = -4 -4 -4 -4$ としたときの安定性

図9よりシーソボールの戻りが俊敏であるが多少振動する

図9、図10でボールの位置はオブザーバの状態推定値をプロットしたものである。

## VI むすび

水平に置かれたシーソの中のボールに僅かな外乱を加えて系の状態を乱してもシーソ内のボールは時間の経過とともにモータ軸の中心に収束し、外乱を抑制するようにモータが働く。このような簡単な制御の基本を説明する教材を試作した。

この研究の特徴は極配置法でレギュレータの極を決めたこととパラメータのデジタル化において最も簡単な一次変換を用いたこと。このような簡単な方法によってもシーソシステムの安定化が実現できたことは現代制御理論の有効性を証明するものである。このような不安定制御系の安定化の実験を行い、それが能開セミナー等の学習教材に使えるのではないかと言う感触を得た。

おわりに、この論文を作成する上で現代制御理論や不感帯の処置法などその他多くのことを千葉大学工学部教授の野波健三先生、劉康志先生に教えていただいた。これらの方々に深く謝意を表する。

### 【参考文献】

- (1) 美多、小郷：システム制御理論入門、実教出版
- (2) 美多、古田、他：メカニカルシステム制御、オーム社
- (3) 美多、原、近藤：基礎デジタル制御、コロナ社
- (4) 菊地 他：千葉職業能力開発短期大学校平成5年度紀要、倒立振子の安定化実験に用いられるソフトの開発
- (5) 菊地：千葉職業能力開発短期大学校平成6年度紀要、倒立振子の安定化実験を行うための教材作製
- (6) 菊地 木口：千葉職業能力開発短期大学校平成7年度紀要、シーソシステムの安定化制御