

電気回路を使用した入門用PID制御教材の開発

中部職業能力開発促進センター 伊藤 徹*

Development of a PID Control Teaching Material Using Electric Circuit for Beginners

Tōru ITO

要約 PID制御は、電気制御、メカトロニクス制御とさまざまな分野で広く使用されている制御手法の一つである。しかし、今日までPID制御をはじめフィードバック制御関連の教育訓練教材についての提示例が少ない。

本文は、初心者を対象とし、PID制御を理論とシミュレーションおよび実験をとおして理解することのできる教育訓練教材システム（以下、教材システムと略す）について述べる。この教材システムは、汎用のパーソナル・コンピュータをコントローラとし、制御対象をコンデンサと抵抗で構成された電気回路とする小規模システムでPID制御を学習することができる。また制御プログラムについても受講生自身が作成することを原則とする。

本教材は、セミナーにおける多人数教育訓練に対応でき、最小限の機器で構築した教材システムであり、その内容は入門用として十分活用できるものである。

I はじめに

本文は、フィードバック制御の一種であるPID制御の教育訓練用教材の開発をおこなったので、その概要について述べたものである。

PID制御は、制御系設計の手法として歴史が長い。また現在実用されている制御方式のなかでもPID制御が80%以上を占めている⁽¹⁾。しかし、教育訓練現場においては、シーケンス制御を除けば、制御に関する訓練があまりなされていないのが現状である。その理由に、(1)制御対象の数式モデルの構成および解析に時間を要する。(2)A/D、D/A変換およびプログラミングと幅広い知識が必要となること等があげられる。

教材としての制御対象には、機械系と電気系のシステムがあげられる。機械系の制御対象であるボールねじ送り機構をもつシステムなどではテーブルの動きが目視で確認できる利点をもっている反面、ボールねじをはじめ駆動用のモータとそのドライブユニットなどが高価であり、多数揃えるのが困難である。また制御

の失敗による破損があるなどの欠点をもっている。電気回路の制御対象では、動作を直接目視で確認することができない欠点を、パーソナル・コンピュータ（以下、パソコンと略す）で状態を計測し、グラフィック表示することで補うことができる。また、電気回路に用いる素子が安価であり、制御の失敗による破損がないため多人数教育訓練に適している。

これらの考えに基づいて、本教材システムは、パソコンをコントローラとし、抵抗とコンデンサからなる素子で構成された電気回路を制御対象とし、PID制御の手法を理論とシミュレーション、実験をもって理解させることができる。また、P、PI制御との応答特性等について比較、検討することができる。

II 教材システムの概要

1. 制御対象

図1は、制御対象とした電気回路を示す。操作量を u とし、制御量をコンデンサ C_2 の両端の電圧 V_2 として目標値に追従させる制御をおこなう。また、状態と

してコンデンサ C_1 の両端の電圧 V_1 を検出することにより、1入力1出力の2次系のシステムとして取り扱う。

2. コントローラ

図2は、教材システムの概要を示す。コントローラには、汎用のパソコン(NEC PC9801BX)を使用した。拡張スロットには、サンプリング時間を決める自作のタイマボード、コンデンサ両端の電圧 V_1 、 V_2 を測定するためのA/D変換ボード(コンテック AD12-16(98))、また操作量を制御対象に与えるためのD/A変換ボード(コンテック DA12-4(98))を取り付けている。A/D変換ボードの入力抵抗に比べて、制御対象の抵抗値が大きいため電圧フォロワを経由してコンデンサ両端の電圧 V_1 、 V_2 を測定した。また、D/A変換の出力電圧を0~+10[V]に設定し、増幅回路を用いて0~+20[V]の操作量を与えることができるようにした。

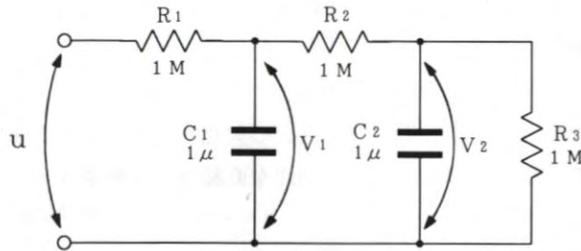


図1 制御対象

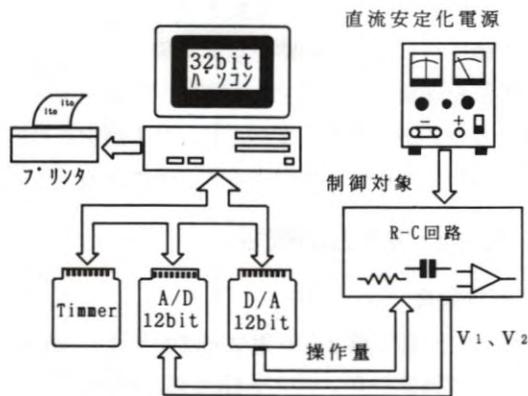


図2 教材システム概要図

3. 制御プログラムの構成

プログラムは、シミュレーション用と実験用に大別され、すべてC言語(ポーランド Turbo.C)を使用して記述する。シミュレーション用には、シミュレーションファイル、実験用には、メインファイル、関数ファイル、ヘッダファイルの三つに分けて記述する。

どちらも実行結果をグラフ表示するためにグラフファイルを用意した。

一般に、限られた訓練時間において、どれだけの時間をプログラムの記述にあてることができるかが問題である。本教材システムは、制御の手法を理解することを目的としている。このため、制御アルゴリズムを記述するメインファイルは、受講者自身が作成する。シミュレーションファイル、関数ファイル、ヘッダファイルおよびグラフファイルは、訓練時間数に応じて受講者に記述させるか、あらかじめ用意したものを使用する。

III 制御理論と制御対象

1. PID制御の概要

図4は、PID制御のブロック線図を示す。偏差 e は、目標値と制御量との差で与えられる。操作量 u は、偏差に比例する項、積分に比例する項、微分に比例する項の三項の和として与えられる。PID制御系での調整は、比例ゲイン K_P 、積分時間 T_I 、微分時間 T_D の適切な値を見出すことに帰着する。本システムでは、後に示すジューラ・ニコルスのステップ応答による調整則を用いてこれらの値を決定する。

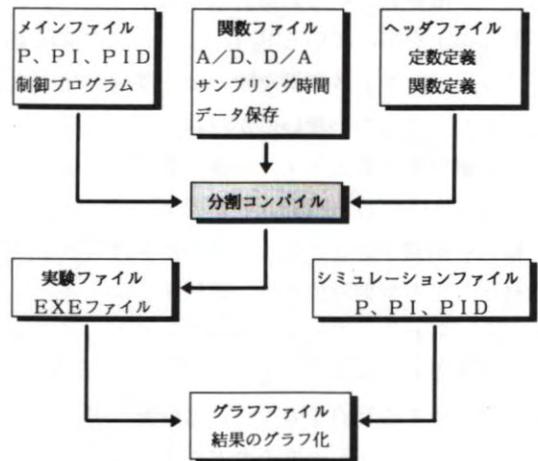


図3 プログラムの構成

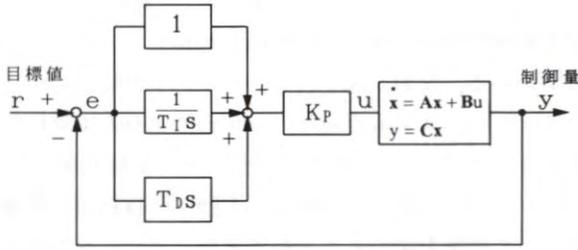


図4 PID制御のブロック線図

2. 制御対象の数学モデル

図1に示す制御対象の回路方程式より、行列を用いて状態方程式を(1)式に、出力方程式を(2)式に示す。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{1}$$

$$x = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} - \frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} - \frac{1}{C_2 R_3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = Cx \tag{2}$$

$$C = [0 \quad 1]$$

また、状態方程式の解は、(3)式となる。右辺第二項の τ は、積分の上限である t と区別するために用いた積分変数である。

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \tag{3}$$

操作量は、偏差を $e(t)$ として、図4のブロック線図にしたがって表すと(4)式となる。

$$u(t) = K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right\} \tag{4}$$

本教材システムは、先にも述べたようにコントローラにパソコンを使用することを前提としており、(1)、(2)、(3)、(4)式を離散化する必要がある。離散時間系においてサンプル番号を $j(0, 1, 2, 3, \dots)$ とし、サンプリング時間を $h=0.1$ 秒とする。また、制御対象への入力 $u(t)$ は、時刻 $t=jh$ から $t=(j+1)h$ までのあいだは一定として階段関数で近似し $u(j)$ と表す。このとき、 $t=(j+1)h$ における状態ベクトル $x(j+1)$

は、初期値が $x(j)$ で h 秒経過後の状態であることより(3)式を書き変えると(5)式となる。

$$x(j+1) = e^{Ah} x(j) + A^{-1}(e^{Ah} - 1)Bu(j) \tag{5}$$

(5)式において行列指数関数である e^{Ah} 値を求めるには、無限級数法、ジョルダン法、ケーリー・ハミルトンの定理を用いる方法などがある。ここでは、解析解を得るに比較的容易な無限級数法を用いる。 e^{Ah} は(6)式に示す無限級数で定義されており、収束の具合を見ながら適当なところで区切って計算により求めることができる。

$$e^{Ah} = I + \frac{A}{1}h + \frac{A^2}{2!}h^2 + \dots + \frac{A^n}{n!}h^n + \dots \tag{6}$$

これより、図1の定数を(5)式に代入すると(7)式の離散化をした状態方程式となる。また、操作量は、(4)式において偏差の積分を矩形近似で、微分を後退差分で近似することによって離散化すると(9)式となる。

$$x(j+1) = \hat{A}x(j) + \hat{B}u(j) \tag{7}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.823 & 0.082 \\ 0.082 & 0.823 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.0908 \\ 0.0044 \end{bmatrix}$$

$$y(j+1) = [0 \quad 1] x(j+1) \tag{8}$$

$$u(j) = K_P \left[e(j) + \frac{h}{T_I} \sum_{i=0}^j e(i) + \frac{T_D}{h} \{e(j) - e(j-1)\} \right] \tag{9}$$

(7)、(8)、(9)式を用いて、次節に述べる各実験およびシミュレーションをおこなう。

IV 実験とシミュレーション

1. ステップ応答

制御をするためには、まず制御対象の特性を調べる必要がある。ジューダ・ニコルスの調整則は、制御対象のステップ応答を一次遅れとむだ時間で近似することによってPID制御に必要なパラメータ K_P, T_I, T_D を求めるものである。

図5は、制御対象にフィードバック制御を行うまえに、開ループ状態で9[V]のステップ入力を加えたときの応答を実験により求めたものである。図中の斜線は、応答曲線の変曲点での接線を表す。この接線と横軸と交わる時刻をむだ時間 L 、操作量と制御量が最終的に落ち着く値との比を定常ゲイン K とする。また、制御量が定常値の63.2%となる時刻よりむだ時間を差し引いた値が、時定数 T となる。これより調整則に必要な三つの値を作図により求めると $K=0.333, L=0.254, T=1.238$ となり、表1に示す調整則にしたがってPID制御の各パラメータを決定することができる。これ

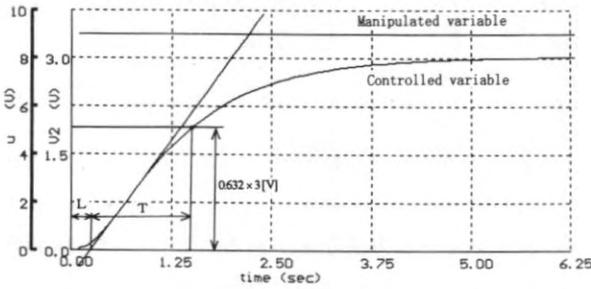


図5 制御対象のステップ応答

表1 Ziegler-Nichols の調整則

制御形態	K_P	T_I	T_D
P	$T / (K \cdot L)$	∞	0
PI	$0.9 T / (K \cdot L)$	$3.3 L$	0
PID	$1.2 T / (K \cdot L)$	$2 L$	$0.5 L$

らのパラメータは、そのまま良好な制御を達成する訳ではないが希望応答を得るための初期値として役立つ。

2. 実験結果

図6は、実験用プログラムのフローチャートを示す。実験では、パラメータ K_P 、 T_I 、 T_D を設定し、サンプリング時間毎に偏差を求め、(9)式の演算により得られた操作量を制御対象に与える。図7、8、9は制御対象にそれぞれP、PI、PID制御をおこなったときの制御量 V_2 と操作量 u を示す。なお、すべての実験において、目標値を3[V]としておこなった。これについては4. で詳しく述べる。P制御では、制御量に定常偏差が生じている。PI、PID制御ではやや振動的となつてはいるが、定常偏差はなくなっている。いずれの場合にも、制御開始からしばらくのあいだ操作量が飽和している。これは先にも述べたように操作量の出力を0~+20[V]の範囲としたためである。制御において操作量が無限大であることはなく、むしろ限られている場合がほとんどである。

3. シミュレーション結果

シミュレーションでは、状態の初期条件を決め、サンプリング時間毎に(9)式で操作量を求め、(7)式に代入することにより状態を求めることができる。

図10、11は制御対象に加えることのできる電圧を無限大としたときのPI、PID制御の応答をシミュレートした結果を示す。PID制御では、定常偏差もなく、PI制御の欠点である応答性の改善がなされていることがわかる。なお、図7、8、9に示す実験に対するシミュレーションも行った。いずれの場合も実験結果とよく一致することを確認している。実験結果とシミュレーションより、P動作、I動作、D動作の役割について理解を深めることができる。パソコンでのシミュレーションは、各パラメータに対する即応性、安定性を評価する上で有用であり、希望する応答特性を得るための評価システムとして利用できる。

4. 定常値

制御量がほぼ定常状態に到達したときの値を定常値という。P制御実験によって得られた定常値は、ラプラス変換における最終値の定理⁽²⁾によっても求めることができる。一例として、実験に使用した比例ゲイン $K_P=14.64$ を用いて定常値を具体的に求めてみる。

操作量 u と制御量 y の伝達関数が(1)、(2)式より $C(sI-A)^{-1}B$ であることより、目標値 r と制御量 $Y(=V_2)$ の伝達関数は、それぞれラプラス変換したものを $R(s)$ 、 $Y(s)$ とすると(10)式となる。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{14.64}{s^2 + 4s + 17.64} \quad (10)$$

ここで目標値を実験と同様に $r=3.0[V]$ とし最終値の定理を適用し、定常値を求めると

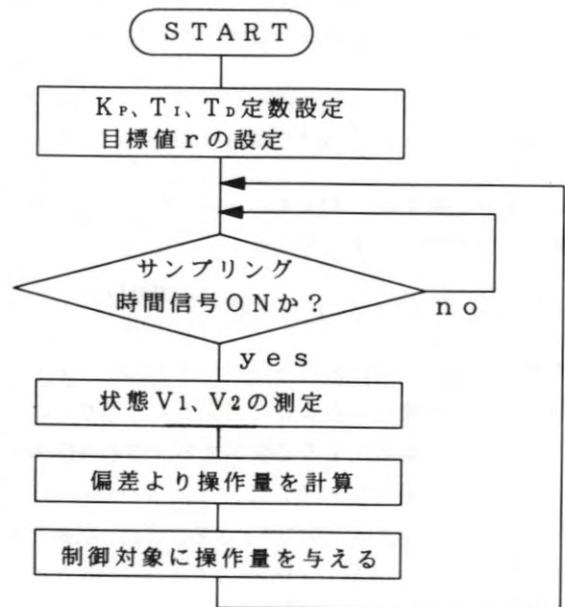


図6 実験用プログラムのフローチャート

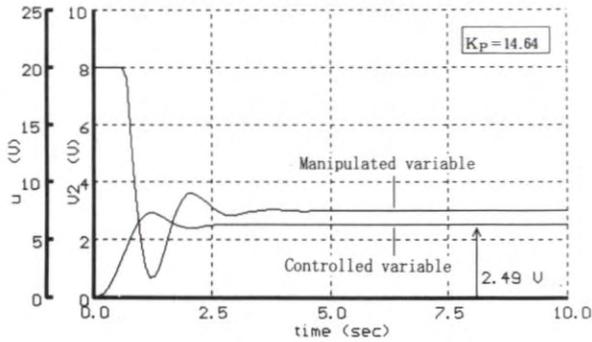


図7 P制御応答実験

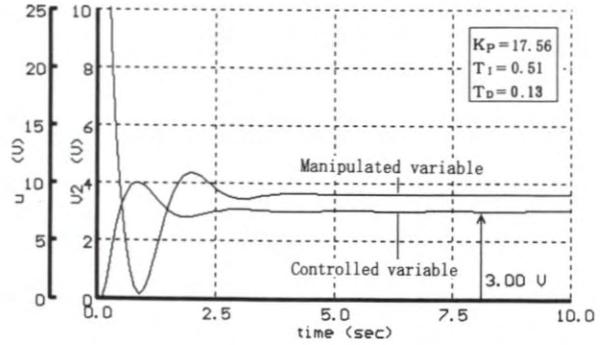


図11 PID制御応答シミュレーション

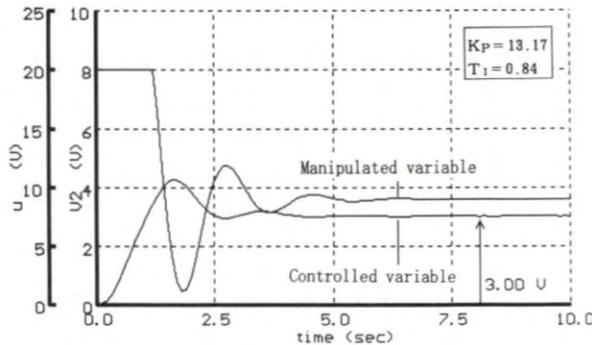


図8 PI制御応答実験

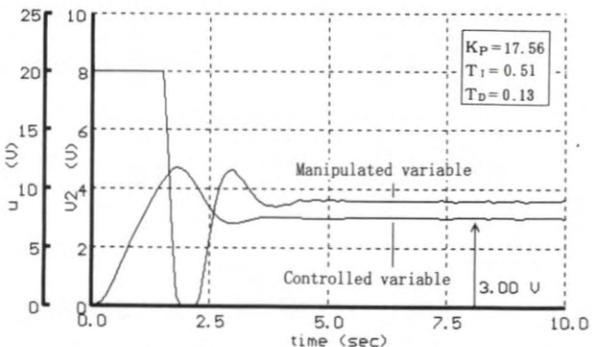


図9 PID制御応答実験

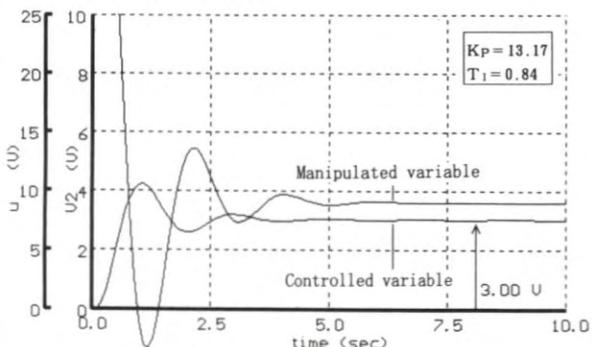


図10 PI制御応答シミュレーション

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \cdot \frac{14.64}{s^2 + 4s + 17.64} \cdot \frac{3}{s} \right) = 2.49[V] \quad (11)$$

となり、図7の実験値と一致した結果を得ることができる。またPI、PID制御では操作量に積分動作が加わることより、定常値が目標値と一致し、偏差がゼロになることを上記の定理によって示すことができる。

V おわりに

パソコンをコントローラとし、制御対象を電気回路としてPID制御をおこない、制御の手法を理解する教材システムの作成をおこなった。以下に本教材システムの利点を挙げる。

- (1) 制御対象が抵抗-コンデンサ回路であることより数式モデルが理解しやすい。
- (2) 操作量、制御量をグラフィック表示することにより比例(P)、積分(I)、微分(D)の各動作の役割が明確に理解できる。
- (3) 教材システムが、パソコン、A/D、D/A変換ボードそして、制御対象とした電気回路と極めて小規模なシステムで構成されており、電気回路に使用した部品が安価であり、制御の失敗による破損がないため、多人数の教育訓練にも対応することができる。

また、本教材システムは、他の活用事例として制御における周波数応答や、電気回路の過渡現象の分野の教材としての発展性があると考えられる。

(参考文献)

- (1) 須田信英ほか、PID制御、朝倉書店、p7
- (2) たとえば、増淵正美、自動制御、朝倉書店、(1990) p76-80
- (3) トランジスタ技術、温度・湿度センサ活用ハンドブック、CQ出版、p146-154