

領域の自動三角形分割法を用いた有限要素法解析の入力データの作成法と結果データの表示法

茨城職業能力開発短期大学校 川 端 広 一*

Method of Input Data Generation and Resultant Data Representation of Second Order Finite Element Method Analysis Using Automatic Triangulation Algorithm

Hirokazu KAWABATA

要約

有限要素法は、理工系の分野における標準的な数値解析法として広く用いられるようになってきているが、そのデータ作成は、一般的に煩雑である。本報告では、高澤の提案している領域の三角形分割の方法に注目し、補間関数として二次要素を用いた有限要素法解析で必要とされる煩雑なデータを自動的に要素分割された三角形のデータから作成する方法を提案する。また、解析結果の表示においても三角形分割の方法を利用することにより等高線表示に加えて立体表示も容易に行うことができることを示し、最後に、本報告の適用例を示しデータの作成、解析、結果の表示という一連の有限要素法解析が容易に行えることを示す。

I はじめに

近年の電子計算機の急速な発達と実用的な数値解析法の研究の進展により、これまで比較的簡単な条件のもとで解析されていた境界値問題等に対しても、より精密な解析が行えるようになってきている。そのような中で有限要素法は、解析点の設定を自由に行えると共に媒質の特性等も容易に考慮することができるなどの利点を有し、広範な分野において実験に代わる標準的な数値シミュレーション法として利用されるようになってきている。しかし、有限要素法の利点である解析点の設定における自由度の高さは、逆にそのためのデータ作成の手間が煩雑になるという欠点にもなっている。一般に、有限要素法では、その解析部分や解析点の配置や領域の分割等については触れられるが、データの作成等については触れられることが少ない。そのため、データの作成は自動分割法の研究や専用の処理系等もあるが手作業によることも多く、解析点数が多くなるにつれて労力が増すと共に誤りも生じやす

く解析点の変更等も容易ではなくなる。

本報告では、精度の向上をはかるために三角形二次要素を用いた有限要素法の解析に必要なとされるデータを高澤の提案している領域の三角形分割の方法を用いることにより、解析領域に誘電率の異なる媒質を含む場合にも容易に構成することができることを示す。また、解析では電子計算機のメモリ容量の節約の観点から連立方程式を緩和計算により解き、解析結果も領域の三角形分割を利用して等高線表示および立体表示により示している。

II 解 析

1. 有限要素法 (二次要素)⁽¹⁾

有限要素法は、変分法に基づいた汎関数の最小化問題を基礎とする境界値問題の数値解析法の一つであり、汎関数の積分を小さな領域に分割し、各領域ごとに区分的に定義された近似関数を用いて解析する点が大きな特徴となっている。

本報告では、二次元の Laplace 方程式を用いて静電

場を解析するため、電位関数と媒質の誘電率をそれぞれ $\phi_{(x,y)}$ および $\epsilon_{(x,y)}$ として、つぎの汎関数を考える。

$$L(\phi_{(x,y)}) = \iint_S \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \epsilon_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dydx$$

ここで、S は解析領域全体を表わす。そして、この汎関数を最小とする電位関数 $\phi_{(x,y)}$ を求めるため、積分領域を三角形の領域に分割し、その各領域内で電位関数をつぎの二次関数により近似する。

$$\begin{aligned} \phi_{(x,y)} &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \\ &= [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \\ &= [M]^t [a] \end{aligned} \quad (2)$$

このとき、各三角形領域において頂点および各辺の中点の6節点を考え、誘電率は領域内で一定とする。また、座標系に対しては領域内において一次関数により補間を行うものとする。

これらから、各三角形領域内での汎関数をつぎのような行列の形で表すことができる。

$$L_e(\phi_{(x,y)}) = \frac{1}{2} [\phi]^t [K] [\phi] \quad (3)$$

ここで、[K] はつぎのように表される行列である。

$$[K] = \iint_{S^e} \{ \epsilon_x [N_x] [N_x]^t + \epsilon_y [N_y] [N_y]^t \} dydx \quad (4)$$

また、行列 $[N_x]^t$ や $[N_y]^t$ は三角形の6節点における座標と電位値の関係からつぎのように表される。

$$[A][a] = [\phi] \quad (5)$$

から

$$\begin{aligned} \phi_{(x,y)} &= [M]^t [a] \\ &= [M]^t [A]^{-1} [\phi] \\ &= [N]^t [\phi] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [N]^t \right\} [\phi] \\ &= [N_x]^t [\phi] \end{aligned} \quad (7)$$

$[N_y]^t$ についても同様である。

そして有限要素法では、これから構成されるつぎの全体の節点方程式（連立方程式）を解くことにより各節点での電位値 $\phi_{(x,y)}$ を求めることができる。

$$\frac{\partial L(\phi_{(x,y)})}{\partial [\phi]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \phi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \phi_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_e \frac{\partial L_e}{\partial \phi_1} \\ \vdots \\ \sum_e \frac{\partial L_e}{\partial \phi_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

ところで、(4)式の [K] の各要素の計算は、分割された三角形の形状が任意であることから、面積座標を用いて基準要素に対して求めておき、実際の三角形との対応は座標変換により考慮するという方法がよく用いられている。⁽¹⁾

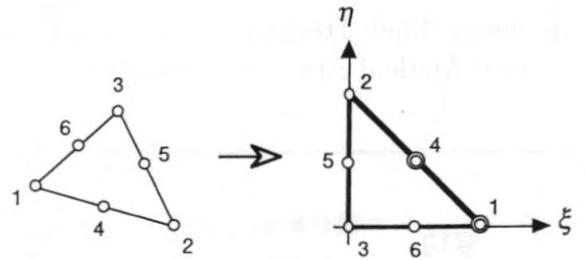


図1 基準要素への変換

図1に示される6節点二次要素では、補間関数の基底関数をつぎのように表される。

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(2\xi-1) \\ \eta(2\eta-1) \\ (1-\xi-\eta)\{2(1-\xi-\eta)-1\} \\ 4\xi\eta \\ 4\eta(1-\xi-\eta) \\ 4\xi(1\xi-\eta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

一方、座標変換については一次関数による対応を考えると (x_i, y_i) を座標値として、つぎの式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{bmatrix} \quad (10)$$

これから、つぎの微分に対する変換式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} y_2-y_3 & -(y_1-y_3) \\ -(x_2-x_3) & x_1-x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$2 \Delta^e = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) \quad (12)$$

$$= b_1 c_2 - b_2 c_1$$

以上から、座標変換を考慮して $[K]$ を求めるとつぎのようにまとめられる。

$$[K] = \iint_{S^e} \mathcal{E}_x [N_x] [N_x]^t dy dx + \iint_{S^e} \mathcal{E}_y [N_y] [N_y]^t dy dx$$

$$= \iint_{S^e} \frac{\mathcal{E}_x}{2\Delta^e} \{b_1 [N_\xi] - b_2 [N_\eta]\} \{b_1 [N_\xi] - b_2 [N_\eta]\}^t d\eta d\xi \quad (13)$$

$$+ \iint_{S^e} \frac{\mathcal{E}_y}{2\Delta^e} \{-c_1 [N_\xi] + c_2 [N_\eta]\} \{-c_1 [N_\xi] + c_2 [N_\eta]\}^t d\eta d\xi$$

ただし、 $[K] = [K_1] + [K_2]$

$$[K_1] = \frac{\mathcal{E}_x}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} \frac{b_1^2}{2} & -\frac{b_1 b_2}{6} & \frac{b_1(b_1 + b_2)}{6} \\ -\frac{b_1 b_2}{6} & \frac{b_2^2}{2} & \frac{b_2(b_1 + b_2)}{6} \\ \frac{b_1(b_1 + b_2)}{6} & \frac{b_2(b_1 + b_2)}{6} & \frac{(b_1 + b_2)^2}{2} \\ \frac{2b_1 b_2}{3} & \frac{2b_1 b_2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2b_2(b_1 + b_2)}{3} & \frac{2b_2(b_1 + b_2)}{3} \\ -\frac{2b_1(b_1 + b_2)}{3} & 0 & -\frac{2b_1(b_1 + b_2)}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2b_1 b_2}{3} & 0 & -\frac{2b_1(b_1 + b_2)}{3} \\ \frac{2b_1 b_2}{3} & -\frac{2b_2(b_1 + b_2)}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2b_2(b_1 + b_2)}{3} & -\frac{2b_1(b_1 + b_2)}{3} \\ \frac{4(b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2)}{3} & \frac{4b_1(b_1 + b_2)}{3} & \frac{4b_2(b_1 + b_2)}{3} \\ -\frac{4b_1(b_1 + b_2)}{3} & \frac{4(b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2)}{3} & \frac{4b_1 b_2}{3} \\ \frac{4b_2(b_1 + b_2)}{3} & \frac{4b_1 b_2}{3} & \frac{4(b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2)}{3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

また、 $[K_2]$ は $[K_1]$ において $\mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_y, b_1 \rightarrow c_1, b_2 \rightarrow c_2$ と変換をしたものである。

これらを用いることにより有限要素法解析において最終的に解くべき方程式（全体の節点方程式）を構成することができる。ここで、節点の番号の添字は小三角形によるものと全体のものとを適宜対応させるものとする。

2. 緩和計算と節点データ

有限要素法で解くべき連立方程式の大きさは節点の数と等しくなるが、各行の式は注目している節点の電位値 ϕ_n で微分したものであり、その節点を含む小三角形の節点に関する項以外は零となる。そのため係数行列は、非零の項が行列の対角成分の付近に集中した

帯行列であり、また零成分の割合の多い疎行列でもある。一方、連立方程式の解法としては Gauss の消去法がよく用いられるが、有限要素法では節点数が多くなるにつれ、Gauss の消去法は計算機の記憶容量や計算時間の観点からあまり効率的な解法ではなくなる。本報告では、特に記憶容量を節約する観点から、反復法による代表的な解法である緩和法 (SOR 法) を用い、パソコンでも十分解が得られるものとしている。

つぎに緩和法では、注目している節点のまわりの節点の電位値から更新値が求められるが、これは全体の節点方程式の 1 行に対応し、注目点が関係する小三角形の情報をもとに構成することができる。ここで、二次補間関数を用いた場合には節点が小三角形の頂点と辺上にあるため、それぞれ更新値を求める関係式はつぎようになる。

・頂点 1 の更新値 ϕ_1 のとき

$$\left[\sum_e \frac{3}{\Delta^e} (\mathcal{E}_x c_1^2 + \mathcal{E}_y b_1^2) \right] \phi_1$$

$$= \sum_e \frac{1}{\Delta^e} [(\mathcal{E}_x c_1 c_2 + \mathcal{E}_y b_1 b_2)(\phi_2 - 4\phi_1) - \{\mathcal{E}_x c_1(c_1 + c_2) + \mathcal{E}_y b_1(b_1 + b_2)\}(\phi_3 - 4\phi_1)] \quad (15)$$

・辺上の点 4 の更新値 ϕ_4 のとき

$$\left[\sum_e \frac{2}{\Delta^e} \{ \mathcal{E}_x (c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2) + \mathcal{E}_y (b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2) \} \right] \phi_4$$

$$= \sum_e \frac{1}{\Delta^e} [-(\mathcal{E}_x c_1 c_2 + \mathcal{E}_y b_1 b_2)(\phi_1 + \phi_2) + 2\{\mathcal{E}_x c_1(c_1 + c_2) + \mathcal{E}_y b_1(b_1 + b_2)\} \phi_3 + 2\{\mathcal{E}_x c_2(c_1 + c_2) + \mathcal{E}_y b_2(b_1 + b_2)\} \phi_4] \quad (16)$$

また、この 2 点以外の頂点と辺上の節点については、基準要素への座標変換のときに注目点が頂点 1 や辺上の点 4 になるようにすることで考慮することができる。したがって、あらかじめデータとして注目点が頂点か辺上の節点であることを判定できるようにしておく必要がある。一方、計算に必要となる各小三角形領域を構成する節点の関係や電位値を更新していく節点の順番等のデータも節点に関与する小三角形のデータと共に必要とされる。

III 領域分割とプリプロセッサ

実際の有限要素法の解析では、各分割領域である小三角形領域を構成する節点の関係および節点に関する小三角形領域の関係を与えなければならない。ここで、前者は近似関数を構成するときに利用され、後者は一般には連立方程式（節点方程式）を構成するために利用されるが、本報告では緩和計算において注目す

る節点と周囲の節点との関係を得るために用いられる。また、緩和計算では電位関数値 ϕ_n を更新していく節点の順番もデータとして与えなければならない。一般に、このようなデータの作成は、汎用的な前処理プログラムを利用することもできるが、手作業によることが多く、節点の数が増すにつれて作業が煩雑になると共に誤りなども生じやすく、データの変更等に対しても修正が行いにくくなる。本報告では、これらの欠点に対して高澤の提案している二次元領域内に任意に与えられた点を頂点とする領域の三角形分割のアルゴリズム⁽²⁾に注目し、必要とされるデータの作成を容易に行う前処理プログラムを以下のように構成している。⁽³⁾⁽⁴⁾

高澤は与えられた境界の線分に対し、領域内の点からその線分を見込む角が最大となるものを選び三角形を構成していく領域の分割の方法を提案している。この方法につくられた三角形の辺を新たな境界線分として三角形を構成していくと、境界の線分（または三角形）が領域の内部へと向かい、やがてすべての線分が三角形の辺となり境界の線分がなくなったところで領域の三角形分割が終了する。図2は、領域分割の様子を示したもので、与えられた節点の配置(a)と三角形が構成されて境界が内部へ向かう途中の状態(b)、そして分割が終了した状態(c)を示している。

これらの分割の過程は、表1のような線分テーブルを構成していく形にまとめられる（節点の様子は図3）。そして、有限要素法で必要とされるデータは、このテーブルを利用することにより容易に作成することができる。ここで、線分テーブルでは方向付けられた線分 begin-end に対し三角形の第3の頂点を left の点として節点番号を記入し、新たに構成された線分がテーブルに追加される。このとき、追加される線分の中にはすでに構成された三角形の辺として登録されているものもある。また、left の点が定まると一つの三角形が構成されるのでこのときに三角形の番号も設定される。一方、right には線分の右側に構成される三角形の頂点が、mid には線分の中点がそれぞれ設定され、後の等高線の追跡や三角形の6節点として利用される。これから、三角形を構成する節点の関係および節点のまわりの三角形の関係のデータを得ることができる。

また、緩和計算のときの更新点の順番も三角形を構成するときに定められる Left の点を重複がないように指定すると、分割三角形の構成方法から、境界に近い方から内側に向かっていくため緩和計算にとっては

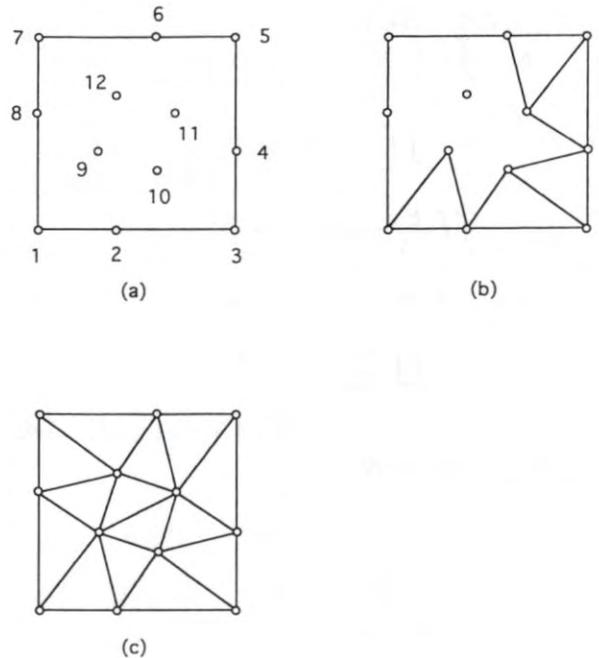


図2 領域の三角形分割

表1 線分テーブル

Tri angle	begin	end	right	left	mid
(1)	1	2	-1	9	13
(2)	2	3	-1	10	14
(3)	3	4	-1	10	15
(4)	4	5	-1	11	16
(5)	5	6	-1	11	17
(6)	6	7	-1	12	18
(7)	7	8	-1	12	19
(8)	8	1	-1	9	20
	1	9	2	8	21
(9)	9	2	1	10	22
	2	10	3	9	23
	10	3	2	4	24
(10)	10	4	3	11	25
	4	11	5	10	26
	11	5	4	6	27
(11)	11	6	5	12	28
	6	12	7	11	29
	12	7	6	8	30
(12)	12	8	7	9	31
	8	9	1	12	32
(13)	9	10	2	11	33
	10	11	4	9	34
(14)	11	12	6	9	35
	12	9	8	11	36
	9	11	10	12	37

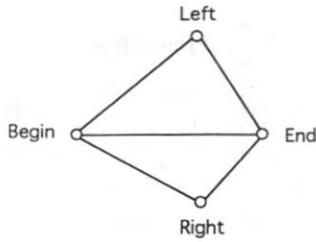


図3 線分と三角形

効率的なものとなることわかる。さらに、境界上の節点に Dirichlet 条件のものだけでなく Neumann 条件のものも含むときは、はじめに境界上の Neumann 条件の節点を更新点として指定した後、Left の点を指定することにより考慮することができる。(図4)

つぎに高澤の分割法では分割領域内の媒質について特に考慮されていないが、有限要素法解析では領域内に誘電率の異なる媒質を含むときも解析を行うことができるので、分割を行うときにこの媒質の違いを考慮できれば、分割データの作成プログラムの適用範囲を広げることができる。本報告では、節点のデータにその点が含まれる媒質の誘電率を与えることにより従来の第3の頂点の選択基準である「線分を見込む角度が最大になる」よりも「三角形の3頂点の誘電率の値が異ならない」という条件を優先させることにより考慮している。ただし、境界上の誘電率は不定として頂点の候補に含めている。また、このときの誘電率の値は各分割三角形内の誘電率の値として解析において利用される。(図5)

以上により節点と境界のデータから有限要素法で必

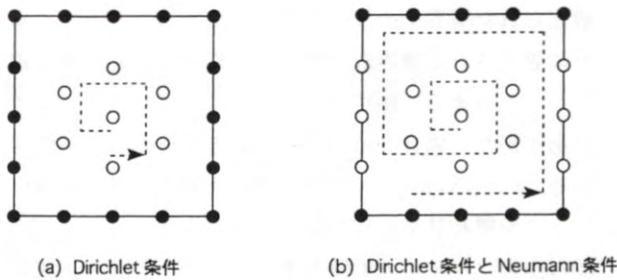


図4 更新点と境界条件

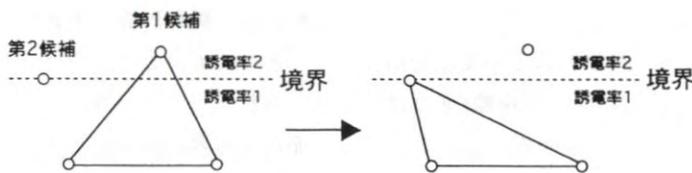


図5 誘導率と分割

要とされるデータを構成することができるが、ここで作成されるデータは各三角形の3頂点を節点として領域内の電位を一次式で補間するものである。本報告では二次関数による電位の補間を考えるため、さらにデータについて考慮する必要がある。すなわち、二次関数による補間では図6のように各三角形の辺上に新たに節点を設ける必要がある。これは、線分テーブルに登録されている線分の midpoint を新たな節点 mid として設定し、三角形に含まれる6節点や節点に関する三角形との関係も線分テーブルから一次補間のときと同様に導くことができる。ここで、II-2節で述べたように緩和計算のとき考慮すべき計算式を節点の位置により三角形の頂点のときと辺上のときとで使い分ける必要性から節点がどちらのものかを区別できるよう判定用のデータを付加している。さらに、緩和計算のときの電位の更新点の順番も図7に示されるように三角形の6節点の中の第3の頂点を挟む2つの辺上の点を第1から第3の候補として重複がないように指定することにより行っている。

IV 領域分割とポストプロセッサ⁽⁵⁾

有限要素法により求められた各節点での電位値を表示した後処理プログラムとして等高線表示と立体表示

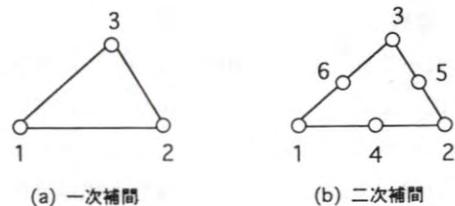


図6 補間関数と節点

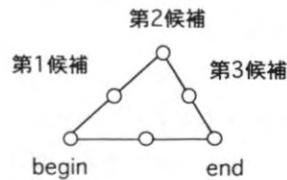


図7 更新点の順番

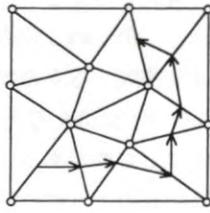


図8 等高線の追跡

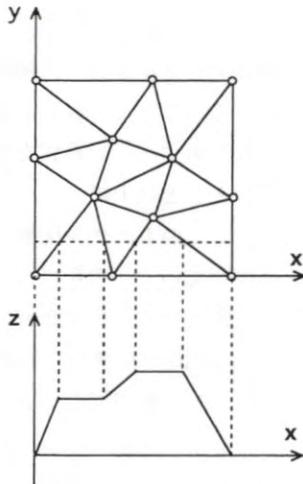


図9 立体の切り口

について以下に示す。

1. 等高線表示⁽²⁾

高澤はII-3節で述べた領域の分割法の応用例として二次元的に配置された節点に値が与えられている場合にこれらの値の分布を等高線表示する方法を示している。これは、等高線の交差する線分と領域分割された各三角形の辺との関係をうまく利用して、等高線を連続的に追跡しながら効率的に描くものである。すなわち、1つの線分と交差する等高線はその線分の属す三角形の他の2辺のいずれかと交わるので、さらにその線分の属す別の三角形を線分テーブルから知れば、また、等高線の交差する線分をその別の三角形の他の2辺の一方として知ることができる。以後、同様にして等高線を追跡していくことができるというものである。(図8)

2. 立体表示

等高線表示は等高線と分割三角形の辺との交点を結ぶことにより構成されるが、ここでは、y座標(またはx座標)の一定値と線分との交点を求めることによりデータを3次的に表示する。一般に、節点に与えられた電位値をz座標とすると節点のデータは3次元空

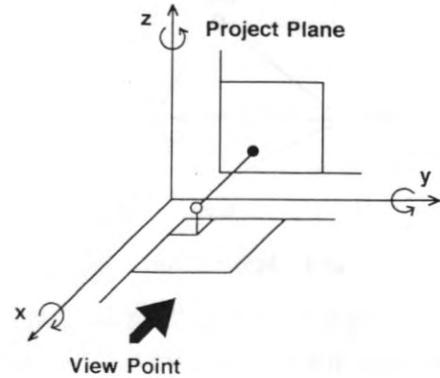


図10 軸側投影

間において1つの曲面を構成するが、この面を立体的に表示するためx-z面に平行な面により切り取られる曲線を表示することにより行う。ここで、切り口の面と交わる三角形の辺は線分テーブルから容易に求めることができるので、この交点の座標から一次補間により交点での電位値を求め、これらの点を順に結ぶことで切り口の曲線が得られる。(図9) さらに、この図形を表示するために軸側投影法や隠れ線処理を行うことにより立体表示を容易に行うことができる。(図10)

V 数値解析例

1. 三角形分割による有限要素法データ (プリプロセッサ)

図11にプリプロセッサの入出力のデータファイルを示す。(a)の入力データでは、9点の座標と比誘電率、領域の境界を表す線分データおよびNeumann条件の設定された境界上の節点を指定している。ここで、新たに設定される境界線分の midpoint に対しては電位値を線分データの後ろに指定できるようにしている。ここでの指定がない場合には線分の両端の電位値から補間される。また、Neumann条件で指定された節点では電位データを緩和計算の初期値として利用している。一方、(b)は出力ファイルで有限要素法解析で用いられるデータである。節点のデータではその点が三角形の頂点(1)か辺上の点(2)かを判定するデータが付加され、境界の線分や三角形と6節点と比誘電率、節点の関係する三角形および緩和計算の更新点の順番が出力されている。

ところで、このプリプロセッサでは有限要素法で用いられるデータ以外に新たに設定された節点を含めた節点と境界の線分およびNeumann条件の設定された節点のデータを別に出力している。このファイルをもう一度プリプロセッサに入力するとデータがはじめの

```

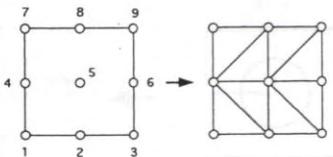
//
// FEM 2-order interpolation
// Pre.Proc input data recursive
//
node position (x,y,z),er
1 0.00 0.00 0.0 1
2 0.50 0.00 0.0 1
3 1.00 0.00 0.0 1
4 0.00 0.50 0.0 1
5 0.50 0.50 0.0 1
6 1.00 0.50 0.0 1
7 0.00 1.00 0.0 1
8 0.50 1.00 1.0 1
9 1.00 1.00 0.0 1

//
// boundary line (begin-end)
//
1 1 2
2 2 3
3 3 6
4 6 9
5 9 8
6 8 7
7 7 4
8 4 1

// Neumann cond. point
//
8

// end of data

```



(a) 入力データ

```

//
// FEM 2-order interpolation
// Pre.Proc(out data), Solver(in data)
//
node(x,y,z), edge/hen (1:'e',2:'h'), er
1 0.000 0.000 0.00000 1 1.000
2 0.500 0.000 0.00000 1 1.000
3 1.000 0.000 0.00000 1 1.000
4 0.000 0.500 0.00000 1 1.000
5 0.500 0.500 0.00000 1 1.000

<<< 途中省略 >>>

23 0.500 0.750 0.00000 2 1.000
24 0.250 0.750 0.00000 2 1.000
25 0.250 0.500 0.00000 2 1.000

//
// boundary (begin-end)
//
1 1 10
2 10 2
3 2 11
4 11 3
5 3 12

<<< 途中省略 >>>

14 16 4
15 4 17
16 17 1

//
// triangle 6 points & er
//
1 1 2 4 10 18 17 1.000
2 2 3 5 11 20 19 1.000
3 3 6 5 12 21 20 1.000
4 6 9 5 13 22 21 1.000
5 9 8 5 14 23 22 1.000
6 8 7 4 15 16 24 1.000
7 4 2 5 18 19 25 1.000
8 5 8 4 23 24 25 1.000

//
// point & triangle
//
1 1 1
2 1 2 7
3 2 3
4 1 6 7 8
5 2 3 4 5 7 8
9 2 7

<<< 途中省略 >>>

23 5 8
24 6 8
25 7 8

//
// sor route point
//
14 8 15
18 19 5 20 21 22 23 24 25

//
// end of data

```

(b) 出力データ

図11 プリプロセッサのデータ

```

//
// FEM 2-order interpolation
// Pre.Proc(out data) recursive
// Pre.Proc(in data) recursive
//
node(x,y,z), er
1 0.000 0.000 0.00000 1.000
2 0.500 0.000 0.00000 1.000
3 1.000 0.000 0.00000 1.000
4 0.000 0.500 0.00000 1.000
5 0.500 0.500 0.00000 1.000
6 1.000 0.500 0.00000 1.000
7 0.000 1.000 0.00000 1.000
8 0.500 1.000 1.00000 1.000
9 1.000 1.000 0.00000 1.000
10 0.250 0.000 0.00000 1.000
11 0.750 0.000 0.00000 1.000
12 1.000 0.250 0.00000 1.000
13 1.000 0.750 0.00000 1.000
14 0.750 1.000 0.70711 1.000
15 0.250 1.000 0.70711 1.000
16 0.000 0.750 0.00000 1.000
17 0.000 0.250 0.00000 1.000
18 0.250 0.250 0.00000 1.000
19 0.500 0.250 0.00000 1.000
20 0.750 0.250 0.00000 1.000
21 0.750 0.500 0.00000 1.000
22 0.750 0.750 0.00000 1.000
23 0.500 0.750 0.00000 1.000
24 0.250 0.750 0.00000 1.000
25 0.250 0.500 0.00000 1.000

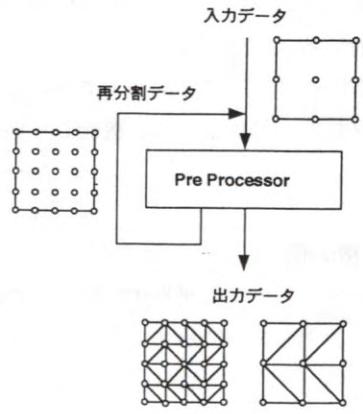
//
// boundary (begin-end)
//
1 1 10
2 10 2
3 2 11
4 11 3
5 3 12
6 12 6
7 6 13
8 13 9
9 9 14
10 14 8
11 8 15
12 15 7
13 7 16
14 16 4
15 4 17
16 17 1

//
// Neumann cond. point
//
8 14 15

//
// end of data

```

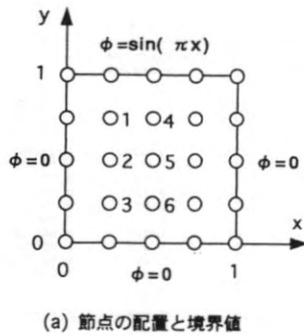
(a) 出力データ



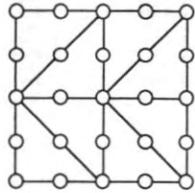
(b) データ流れ

図12 再分割データ

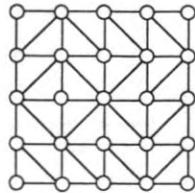
三角形1つに対しておおむね一様に4個に分割されたものが得られ、節点数を増した解析のデータとして用いることができる。(図12)



(a) 節点の配置と境界値



(b) 二次補間関数の場合



(c) 一次補間関数の場合

図13 境界値問題と節点の配置

表2 解析精度の比較

節点	解析解	2次補間	1次補間(=FDM)
1	0.320098	0.328151	0.331784
2	0.140904	0.143566	0.150884
3	0.053187	0.054692	0.058357
4	0.452688	0.461931	0.469242
5	0.199268	0.191421	0.213385
6	0.075218	0.075201	0.082528

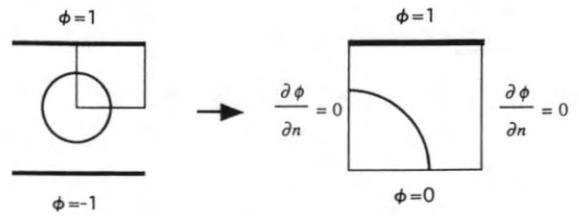


図14 平行平板と円筒誘電体

2. 解析精度の比較

図13に示した境界条件（電位値が1辺で正弦波的变化し、他の3辺は0）と節点の配置に対して一次と二次の補間関数を用いた場合の有限要素法の結果および解析解を表2に示す。ここで、節点は等間隔の格子上に設定されているため一次補間を用いた場合の結果は差分法（FDM）によるものと同じである。これより本報告のデータ作成と解析は有効に機能していることがわかる。

3. 平行平板の例⁽¹⁾

実際の数値例として平行平板中に円筒形の誘電体がある場合の解析例を図14に示す。ここで、上下の導体をそれぞれ+1V、-1Vに設定しているの、系の対称性から上下の辺をDirichlet条件、左右の辺をNeumann条件とすることにより解析領域を全体の四分の一としている。このときの解析結果を図15に示す。入力データから三角形分割が行われ、有限要素法解析で必要とされるデータが作成される。このときの節点数は51、三角形要素数は78である。そして、解析結果を表示プログラムにより等高線表示と立体表示により表している。また、図16は図15の入力データ（同じ三角形要素）を用いたときの一次要素と二次要素に対して電位値の収束値を得るまでの緩和係数wと繰り返し回数の変化の様子を示したものである。最適の係数は一次要素の1.59から二次要素の1.78になり、繰り返し

回数もw=1のときと比較してそれぞれ0.182と0.091の割合の回数で収束していることがわかる。

VI まとめ

本報告では、高澤の提案している領域の三角形分割のアルゴリズムを用いることにより有限要素法解析で必要とされる煩雑なデータを容易に扱える方法を提案した。この方法では、解析領域内の誘電率の違いも考慮して分割データを作成しているため複雑な解析領域に対しても適用することができる。また、プリプロセッサに与えられるデータは解析領域内の節点と境界の線分であり、特に、補間関数の次数を考慮する必要はなく、プリプロセッサの出力として別に得られる節点と境界の線分のデータを再びプリプロセッサに与えることで分割が一様に細かくされたデータが得られる。これを用いればデータ数が増え電子計算機のメモリ消費は多くなるが、直線で囲まれた解析領域に対しては大まかな初期データのみを作成するだけで細かな分割データが容易に得られデータ作成の煩雑さが非常に軽減される。さらに、領域の三角形分割法を用いて有限要素法解析の結果データの等高線表示に加えて立体表示する方法を提案し、本報告で提案したデータの作成・解析・結果の表示という一連の手続きを円筒誘電体を含む平行平板の解析に適用した結果、有限要素法解析を容易に行うことができるようになった。

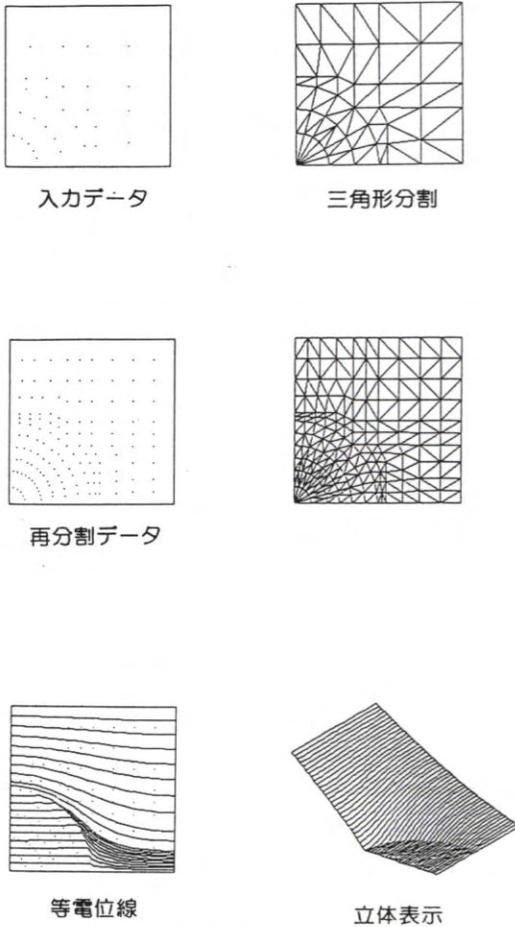


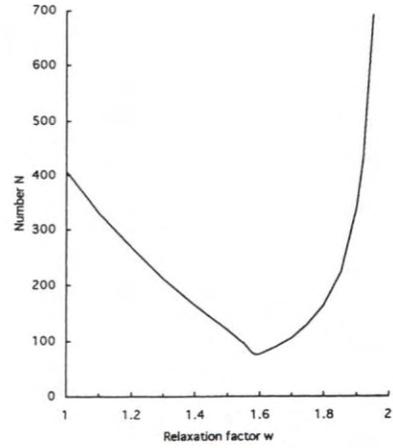
図15 平行平板の解析例

謝辞

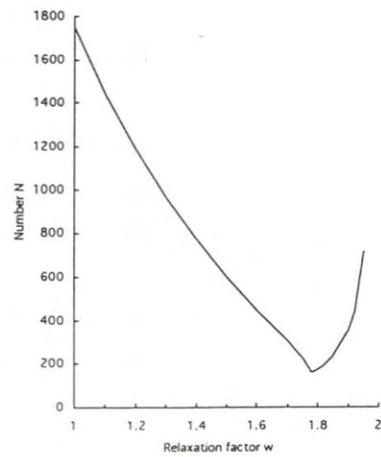
本研究は茨城職業能力開発短期大学校情報技術科の卒業研究として行ったものである。協力して頂いた卒業生諸君に感謝します。

(参考文献)

- (1) 原 武久：「有限要素法の基礎」、昭晃堂、1981.
- (2) 高澤嘉光：「Cと等高線」、Bit, Vol. 19, No. 2, pp149-157 (Feb. 1987).
- (3) 川端広一：「領域分割法の有限要素法解析への応用」、茨城職業能力開発短期大学校紀要第 8 号、pp41-50 (Apr. 1994).
- (4) 川端広一：「領域分割法の有限要素法解析への応用」、実践教育・電気電子情報系ジャーナル、Vol. 5, No. 2, pp17-20 (Dec. 1993).
- (5) 川端広一：「領域分割と等高線・立体表示」、茨城職業能力開発短期大学校紀要第 7 号、pp27-35 (Mar. 1993).



(a) 一次要素



(b) 二次要素

図16 緩和係数と繰り返し回数