〈実践報告・資料〉

構築的な数学学習について

ー簡単な級数から発生するいくつかの数式ー

千葉職業能力開発短期大学校　　加　部　通　明

On constructive study of mathematics

Michiaki KABE

要約　昨今、若者の理工系離れがマスコミを通して、いろいろと話題になっている。これを他人事のように聞き逃して、何も考えずにいるわけには行かない。職業能力開発短大はまさにその渦中にあるから。

職業能力開発において数学は各科の基礎を成す教科である。しかし、学生の数学能力は決して十分であるとは言い難い。数学の能力をつけるためには、単に教科書を読むだけではなく、問題を解くことが必要である。更に欲を言えば、自ら数学を作り上げるようなことをすると本当の力がつくと思われる。また、そのような状況の中で達成感と満足感が得られ、更なる学習及び研究意欲が湧くのである。そのためには、数学を楽しく遊び感覚を持って学習することが１つの方策である。

しかし、直感（遊び感覚）で得た式は、往々にして成立しない場合がある。これを少し理論的にフォローして、直感と理論が一致するようにしたい。本稿はその一例としての報告である。

Ⅰ　はじめに

コンピュータを使用してアニメーションなどを創作するとき、完成品がどのような形になるかわからないが、おおよその輪郭やキャラクターを考えてから、成り行きに任せながら創作することがよくある。操作するうち自然とアイディアが浮かんきてそれを即座にインプットするのである。そして、その画面を見ながらまた新しいアイディアが浮かぶのである。コンピュータがアイディアを浮かべる手助けをしているといえる。

そこで、数学の分野にも遊び感覚（直感）でいろいろな数学的性質の発見ができないかを、簡単な級数

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \qquad (|z|<1)$$

を元にして試みた。画面を眺める代わりにノートの式を見ながらいいアイディアが浮かぶのを期待して数学問題を考える。しかし、数学という性格上、直感で得たものはきちんと証明を与えなければならない。そして、以上のような雰囲気の数学遊びが、数学学習にとって理想の形であることを主張したい。何故ならば、数学の能力をつけるためには、単に問題を解くだけでは十分ではなく、自ら数学を作り上げるようなことをすると本当の力がつくと思われるからである。また、そのような状況の中で達成感と満足感が得られ、更なる学習及び研究意欲が湧くのである。そのためには、数学を楽しく遊び感覚を持って学習することが１つの方策であると思われる。本稿がその一例となっていることを報告する。

Ⅱ　予備定理

以下特にことわらない限り級数は無限級数を意味するものとする。更に簡便のため、$\sum f_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ とする。

今 $|x|<1$ とするとき、つぎの級数に関する等式が成り立つかを考える。

$$\lim_{x\to-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to-1} x^k\right)$$

左辺は $\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}\ (|x|<1)$ なので

$$\lim_{x\to-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)=\lim_{x\to-1}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}.$$

一方右辺は $\lim_{x\to-1} x^k=(-1)^k$ より

論文受付日　1994.10.17

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lim_{k\to -1} x^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

となり振動してしまう。このように$\sum$と lim が交換できない例がある。そこで、このような間違いをしないために、級数についての一般的性質について復習しておこう。

1　級数の収束(4)

応用に便利なので変数zは複素数としておく。複素平面上の１つの集合Eで定義された関数から成る列

$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$

が、$n\to\infty$ のとき、Eの点で収束するならば、その極限値はzの関数で、それを$f(z)$とする。このとき、任意の正数εに対して，個々の$z\in E$に無関係であるがεには依存する自然数$n_0=n_0(\varepsilon)$を適当に定めて

$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon \quad (n\geqq n_0, z\in E)$ ……………(1)

とできるならば、関数列$\{f_n(z)\}$はEにおいて$f(z)$に**一様収束する**という。前述したn_0がzとεの両方に依る数であって(1)が成立すれば、関数列$\{f_n(z)\}$は単に**収束する**という。以下、収束に関する定理を述べておく。それらの証明は省略するが、文献(4)にある。

定理１． Eで定義された関数列$\{f_n(z)\}$が級数

$$f_n(z)=\sum_{k=1}^{n} a_k(z)$$

で表されていて、そこで常に$|a_k(z)|\leqq b_k$ $(k\geqq 1)$、b_kは正の定数で、級数$\sum b_k$が収束すれば、$\{f_n(z)\}$はEで一様収束する。

級数$\sum a_k(z)$の項の絶対値の級数$\sum|a_k(z)|$が収束するとき、元の級数$\sum a_k(z)$は**絶対収束**するという。級数が収束して、絶対収束しないときは、**条件収束**するという。

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ なる形の級数を**べき級数**といい、次のことが成り立つ：

実数Rが存在して$|z|<R$なるzに対してべき級数は絶対収束し、$|z|>R$なるzに対しては発散する。

このようなRをべき級数の**収束半径**といい、$0<R<\infty$である時円：$|z|=R$を**収束円**という。

2　級数の微分と積分(4)

関数項の級数に対する微分や積分は、一様収束の下や収束円の内部でいろいろと自由な計算ができる。ここでは、それらを保証する定理と交代級数に関する定理を挙げておく。

定理２． ①Eで定義された関数$a_k(z)$が連続で、$\sum a_k(z)$が一様収束すれば、$f(z)=\sum a_k(z)$は連続である。

②　①と同じ条件下で、$\sum a_k(z)$を項別に積分することができる。即ち、

$$\int_a^b(\sum a_k(z))dz=\sum(\int_a^b a_k(z)dz).$$

定理３． べき級数$f(z)=\sum a_k z^k$の収束半径を$R(0<R<\infty)$とすれば収束円の内部において、$f(z)$は何回でも項別微分及び項別積分可能である。また、収束半径は次式によって実際に求められる。

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}|a_k|^{1/k} \quad \text{(Cauchy-Hadamard).}$$

定理４． (Abel)べき級数$f(z)=\sum a_k z^k$が収束円の周上の点$z=\zeta$で収束すれば、zが半径に沿ってζに近づくとき、

$$\lim_{z\to\zeta}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{z\to\zeta}\sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right).$$

定理５．（交代級数）

項が交互に正負なる級数

$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$

において、$a_n>a_{n+1}(>0)$, $a_n\to 0(n\to\infty)$ ならば、この級数は収束する。

3　広義積分(3)

被積分関数が有界でない場合には、積分の意味をもっと拡張する必要がある。$f(x)$は区間$[a,b]$の上端bにおいて有界ではなく、十分小さい$\varepsilon(>0)$に対して$[a,b-\varepsilon]$で有界かつ積分可能であるとする。$\varepsilon\to 0$のとき、$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$が有限の極限値を持てば、それを$\int_a^b f(x)dx$で表し、$f(x)$の**広義積分**という。即ち、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

同様に、$[a,b]$の下端aにおいて$f(x)$が有界でないときも広義積分が定義される。即ち、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

III　いろいろな数式

1　式の出発点

ここでは簡単な展開式

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \quad (|z|<1) \quad \cdots\cdots(2)$$

から出発して、積分することによっていろいろな面白い公式を導き出すことにする。

(2)は $|z|<1$ の範囲で絶対収束しているので、定理3より(2)は収束円の内部で項別積分可能である。(2)の両辺を0から z まで積分すれば、次式を得る。

$$-\log(1-z)=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots+\frac{1}{n}z^n+\cdots \quad (|z|<1) \quad \cdots\cdots(3)$$

ところで、(3)は $z=-1$ の時でも成立する。なぜならば、

$$-1+\frac{1}{2}(-1)^2+\frac{1}{3}(-1)^3+\cdots+\frac{1}{n}(-1)^n+\cdots$$

は定理5の条件を満たすので収束する。よって、Abelの定理より(3)式は $z=-1$ の時でも成立する。即ち、

$$\mathbf{\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots} \quad \cdots\cdots(4)$$

が成り立つ。更に、(3)を項別積分すると、

$$(1-z)\log(1-z)+z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k(k+1)} \quad (|z|<1)\cdots(5)$$

となる。そして、$z=-1$ のとき

$$\sum_{k=1}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1$$

となり、級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ は絶対収束するから、Abelの定理によって(5)式は $z=-1$ でも成立する。故に、

$$\mathbf{2\log 2-1=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots}$$

が得られる。次に、z を収束円上の点とすると、(3)は $z=e^{ix}(0<x<2\pi)$ でも成り立つことが証明されている[注1]。即ち、

$$-\log(1-e^{ix})=e^{ix}+\frac{1}{2}e^{2xi}+\cdots+\frac{1}{n}e^{nxi}+\cdots \quad (0<x<2\pi) \quad \cdots\cdots(6)$$

である。左辺は、

$$\log(1-e^{ix})=\log\left((-2i)e^{ix/2}\frac{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}{2i}\right)$$

$$=\log\left(2\exp\left(\frac{x-\pi}{2}i\right)\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$=\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{x-\pi}{2}i.$$

と変形でき(6)式の右辺にEulerの公式を適用し、実数部と虚数部に分けそれを上式と照らし合わせれば、次式を得る。

$0<x<2\pi$ の時、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right), \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=-\frac{x-\pi}{2}. \quad \cdots\cdots(8)$$

ここで(7)式の両辺を積分してみる。

$$\int_{\varepsilon}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}dx=\int_{\varepsilon}^{\pi}-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx.$$

ε を $0<\varepsilon<\pi$ とするとき、$[\varepsilon,\pi]$ で(6)は一様収束するから[注1]、その実数部である(7)の左辺も $\varepsilon\leqq x\leqq\pi$ で一様収束する。よって、左辺は項別積分可能であって、その積分は

$$\int_{\varepsilon}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{\varepsilon}^{\pi}$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\varepsilon}{k^2}.$$

これは ε の関数として任意の ε で絶対収束する。よって、定理1，2から連続となり $\varepsilon\to 0$ のとき上式は0となる。故に、

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}dx=\int_{0}^{\pi}-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx.$$

よって、

$$\int_{0}^{\pi}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx=-\pi\log 2 \quad \cdots\cdots(9)$$

となる。そして、変数変換 $x/2=t$ によって計算すれば

$$\int_{0}^{\pi/2}\mathbf{\log(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\log 2} \text{[注2]} \quad \text{(Euler)}$$

を得る。更に、(8)で $x=\pi/2$ とおけば、Leibnizの公式

$$\mathbf{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi}{4}} \quad \cdots\cdots(10)$$

を、(7)で $x=\pi$ とおけば、再び(4)を得る。

更に、(3)式で収束円内の点 $z=1+e^{-ix}(2\pi/3<x<4\pi/3)$ を代入すれば、$z=e^{-ix/2}(e^{ix/2}+e^{-ix/2})$ より

$$z^k=e^{-ixk/2}(e^{ix/2}+e^{-ix/2})^k$$
$$=2^k(\cos xk/2-i\sin xk/2)\cos^k x/2$$

となる。左辺は $1-z=-e^{-ix}=\exp(i(\pi-x))$ より

$$\log(1-z)=\log(-e^{-ix})=i(\pi-x)$$

となる。従って、

$$(x-\pi)i=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}\left(\cos\frac{x}{2}k-i\sin\frac{x}{2}k\right)\cos^k\frac{x}{2}$$

であるから、両辺を比較して

$$\pi-x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}\sin\frac{x}{2}k\cos^k\frac{x}{2}. \quad \cdots\cdots(11)$$

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}\cos\frac{x}{2}k\cos^k\frac{x}{2}.$$

である。そこで、(11)で収束半径上の点 $2\pi/3$ を考えると右辺の級数は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots\right)$$

となり、定理5を応用して収束することがわかる(注3)。よって、定理4より $x\to 2\pi/3$ として

$$\mathbf{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

が得られる。

2　Catalanの定数

ここでは $x/\sin x$ の級数展開を利用してCatalanの定数に関する数式を考える。先ず、

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{e^{ix}(1-e^{-2xi})}{2i}$$

より

$$\frac{x}{2\sin x}=\frac{ixe^{-ix}}{1-e^{-2xi}}$$

と表せる。(2)を適用するために、$0<r<1$ なる r を用いて

$$f(x;r)=\frac{ixe^{-ix}}{1-re^{-2xi}}=ix\sum_{k=0}^{\infty}r^ke^{-(2k+1)xi}\quad\cdots\cdots\cdots(12)$$

とおけば、

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{\pi/2}f(x;r)dx=\int_0^{\pi/2}\lim_{r\to 1-0}f(x;r)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{x}{2\sin x}dx\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

が成立することがわかる(注4)。そこで(12)式の積分を行う。$|re^{-2xi}|<1$ より級数(12)は絶対収束する。よって、定理3より(12)は項別積分可能である。故に、

$$\int_0^{\pi/2}ixe^{-ix}\frac{dx}{1-re^{-2xi}}=\int_0^{\pi/2}ix\sum_{k=0}^{\infty}r^ke^{-(2k+1)xi}dx$$

$$=i\sum_{k=0}^{\infty}r^k\int_0^{\pi/2}xe^{-(2k+1)xi}dx$$

$$=i\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi(-1)^k}{2(2k+1)}+\int_0^{\pi/2}\frac{e^{-(2k+1)xi}}{(2k+1)i}dx\right)r^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r)^k}{(2k+1)^2}+i\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-r)^k}{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{(2k+1)^2}\right)$$

である。ここで、$r\to 1-0$ とすると上式は、最後の式において第1項の和と第3項の和で絶対収束し、第2項の和では定理5より条件収束する。よって全体として有限な極限値に収束するから定理4から極限の操作と和が交換できて、(13)と併せて次の計算が可能となる。

そのとき、(13)は実数値であるから虚数部は0となる。よって、

$$\mathbf{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}}$$

$$\mathbf{=C\,(=0.91596\cdots).}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

(14)の数はCatalanの定数と呼ばれ、通常 C で表される。ここで虚数部が0であることと(10)より

$$\mathbf{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

が得られ、(15)から次の有名な公式を得る。

$$\mathbf{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

また、(7)式を使用し前と同じように考えて0から $\pi/2$ まで積分すると、

$$-\int_0^{\pi/2}\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^{\pi/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos kx}{k}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=C$$

となり、ここでもCatalan数が得られる。よって

$$\mathbf{\int_0^{\pi/2}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx=-C-\frac{\pi}{2}\log 2.}$$

また、(9)式と

$$\int_0^{\pi/2}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx=\int_{\pi/2}^{\pi}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

より

$$\mathbf{\int_0^{\pi/2}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx=C-\frac{\pi}{2}\log 2.}$$

よって

$$\mathbf{\int_0^{\pi/2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)dx=-2C.}$$

となる。

3　Eulerの定数

(3)で $z=1/2$ を代入すると、

$$\log 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

また、$z=1/3$ を代入すれば、

$$\log 3-\log 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

よって(17)(18)より、

$$\log 3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

以下逐次同様にして計算すれば、次式を得る。

$$\log n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^k\right). \quad \cdots\cdots(19)$$

(19)を少し変形すれば、

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log n = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^k} - 1\right)$$

となる。そこで、$n \to \infty$とする。このとき、左辺はEulerの定数となり右辺は lim と $\sum$ が交換できる。このことを示そう。今、十分大きい n をとると、

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^k} - 1\right) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^k} - 1\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^k}\right|$$

$$\leqq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left|\int_n^{\infty} \frac{1}{x^k}dx\right|$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

$$< \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

故に、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^k} - 1\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^k} - 1\right)$$

となる。よって、Eulerの定数 γ は

$$\boldsymbol{\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log n\right)}$$

$$\boldsymbol{= 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(\zeta(k) - 1)\ (= 0.57721\cdots).}\text{(注5)}$$

ここで、$\zeta(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^k}$ は Riemann のツェータ関数で $k \geqq 2$ なので収束している。

4 Fourier 級数

$0 < u < 2\pi$ のとき、(8)の両辺を区間 $[0, u]$ で積分すれば、(16)より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2} = \frac{u^2}{4} - \frac{\pi u}{2} + \frac{\pi^2}{6}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

(20)で $u = \pi/3$ を代入すれば、

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{2\cdot 5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{36}}$$

となる。上式は、初項を除けば、項が正負連続3回ずつ交互に現れる級数である。

(20)で u を $2\pi u\ (0 < 2\pi u < 2\pi)$ でおき換え変形すると、

$$\frac{1}{2}(u^2 - u) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ku}{k^2}$$

となる。これは $1/2(u^2 - u)\ (0 < u < 1)$ の Fourier 級数展開を表している。

5 $\log(1-x)$ を含む定積分

ここでは、広義積分の意味から $\frac{\log(1-x)}{x^k}$ の積分を考えてみよう。

先ず、$z = x$（実数）とおく。そして、(3)式を変形した級数

$$\frac{\log(1-x)}{x}$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^{n-1} + \cdots\right)$$

を考える。このべき級数の収束半径は1だから定理3より $|x| < 1$ において、項別積分可能である。よって、$0 < \varepsilon < x < 1$ とするとき、$[\varepsilon, x]$ で積分すれば

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\log(1-x)}{x}dx = \int_{\varepsilon}^{x}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\right)dx$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x^n - \varepsilon^n)$$

となる。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するから、定理1、2、4より上端で $x \to 1$ 下端で $\varepsilon \to 0$ のとき、$\sum$ との交換ができる。

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\to 1}} \int_{\varepsilon}^{x} \frac{\log(1-x)}{x}dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\to 1}} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - \varepsilon^n}{n^2}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\to 1}} \frac{x^n - \varepsilon^n}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

となって極限値が存在する。故に、左辺は広義積分可能で次式の積分が得られる。

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.}$$

同様にして

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.}$$

上2式から、

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{1}{x}\log\frac{1-x}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = -\frac{\pi^2}{4}.}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{1}{x}\log(1-x^2)dx = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

次に、(3)の両辺を x^2 で割れば、

$$\frac{\log(1-x)}{x^2} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \cdots\right)$$

となり右辺は$1/x$を含むので、$(0,1)$区間の積分は発散してしまう。しかし、$k<2$のとき、$I_k=\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x^k}dx$とおくと、この広義積分は$k=1$の場合と同じようにして計算できる。そこで、簡易化して計算すると、

$$I_k=-\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-k}}{n}\right)dx$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{x^{n-k}}{n}dx\right)$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1-k)}$$
$$=\frac{1}{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1-k}\right)$$

となる。特に、

$$\boldsymbol{I_{1/2}=\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x^{1/2}}dx=4(\log 2-1).}$$

$$\boldsymbol{I_{3/2}=\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x^{3/2}}dx=-4\log 2.}$$

また、kが負または0の整数のとき、$k=-m(m\geqq 0)$とおけば

$$\boldsymbol{I_{-m}=-\frac{1}{(m+1)}\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n}.}$$

特に

$$\boldsymbol{\int_0^1\log(1-x)dx=-1,}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 x\log(1-x)dx=-\frac{3}{4}}$$

である(注6)。

Ⅳ 終わりに

本稿は定理のみを文献から引用し、その他の結果や計算はできるだけ本文と注で明らかにするよう心がけた。

当初は、証明よりも着想を強調するつもりであったが、数学の性格上どうしても論理を重視して書かざるを得なかった。

[注]

(注1) 文献(4)のP239で$\theta=x-\pi$とおくと
$\zeta=\exp(i(x-\pi))=-e^{ix}$ $(0<x<\pi)$となる。

(注2) この積分には複素関数論による解法があり、たいていの文献に0からπまでの積分計算が載っている。例えば、文献(1)P160にある。

(注3) 定理5の次の系から出る。

系. 項が正負連続してk回交互に現れる級数

$$a_1+a_2+\cdots+a_k-a_{k+1}-\cdots-a_{2k}+\cdots$$

において、$a_n>a_{n+1}(>0)$, $a_n\to 0(n\to\infty)$ならば、この級数は収束する。

(証明) $b_n=a_{nk+1}+\cdots+a_{nk+k}$とおけば、
$a_n>a_{n+1}(>0)$, $a_n\to 0(n\to\infty)$より、
$b_n>b_{n+1}(>0)$, $b_n\to 0(n\to\infty)$
である。よって級数$b_0+b_1+\cdots+b_n+\cdots$は定理5より収束する。故に、級数$a_1+a_2+\cdots+a_k-a_{k+1}-\cdots-a_{2k}+\cdots$は収束する。

(注4) $0<r<1$である。

$$\left|\lim_{r\to 1}\int_0^{\pi/2}f(x;r)dx-\int_0^{\pi/2}\lim_{r\to 1}f(x;r)dx\right|$$
$$\leqq\lim_{r\to 1}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{ixe^{-ix}}{1-re^{-2xi}}-\frac{ixe^{-ix}}{1-e^{-2xi}}\right|dx$$
$$=\lim_{r\to 1}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r)x}{2\sin x((1-r)^2+4r\sin^2 x)^{1/2}}dx$$
$$=\lim_{r\to 1}\int_0^{\pi/4}\frac{2x}{2\sin 2x}\cdot\frac{\cos x}{\left(1+\frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2 x\right)^{1/2}}dx$$
$$+\lim_{r\to 1}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{x}{2\sin x\left(1+\frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2 x\right)^{1/2}}dx$$
$$\leqq\lim_{r\to 1}\frac{\pi(1-r)}{8r^{1/2}}$$
$$\times\left[\log\left(\frac{2r^{1/2}}{1-r}\sin x+\left(1+\frac{4r\sin^2 x}{(1-r)^2}\right)^{1/2}\right)\right]_0^{\pi/4}$$
$$+\lim_{r\to 1}\frac{\pi^2}{16\left(1+\frac{2r}{(1-r)^2}\right)^{1/2}}=0.$$

(注5) 文献(2)のⅡP40には項$(\zeta(k)-1)$を含むいろいろな式が載っている。

(注6) 文献(2)のⅠP241に一例がある。

[参考文献]

(1) Ahlfors Lars V. Complex Analysis, McGRAW-HILL

(2) 数学公式ⅠⅡ 岩波書店

(3) 数学辞典 岩波書店

(4) 高木貞治 解析概論 岩波書店