

# スキーに関する曲げ剛性分布の簡易測定方法の提案

青森職業能力開発短期大学校 工 藤 裕 之  
 (株)青森スキー製作所 工 藤 廣  
 青森職業能力開発短期大学校卒業生  
 神 哲 也・山 内 一 稔・伊 藤 浩 司

A Simple Method to Measure Flexural Rigidity Distribution of Skis.

Hiroyuki KUDŌ・Hiroshi KUDŌ・Tetsuya JIN  
 Kazumi YAMAUCHI・Kouji ITŌ

**要約** この報告は、(株)青森スキー製作所（以後A社と呼ぶ）との共同研究の一部をまとめたものである。

A社によると、スキーの設計の場合、曲げ剛性を測定する精度が重要であり、精度が良ければ2本のスキーを試作するのみで目的のスキーを得ることができる。しかし、現状では、精度が十分でないためにより多くの試作品を作成せざるを得ず、より精度の高い測定方法を開発する必要があるとのことであった。

本研究では、上記のことを解決するために、2枚の電気抵抗線ひずみゲージを使用した曲げ剛性測定方法を考案し、その方法と初等弾性論的方法及び材料力学の曲げ試験の垂直変位から求める方法とを比較すると共に有限要素解析による検討を行った。その結果、今回考案した方法は合理的なものであり、実際のスキーに応用できる可能性が高いことが確かめられた。

## I 緒言

スキーを製作する際、スキーの曲げ剛性（以下EIと呼ぶ）分布がスキーの特性を決める上で重要な因子になると考えられている<sup>(1)</sup>。そのため、そのEIを精度良く測定する必要がある。

材料力学におけるEIの測定方法としては、曲げ試験の垂直変位から求める方法が一般的である。しかし、この方法は、はりのEIが一様であることを前提条件としているのに対し、スキーの場合は、板全体にわたって厚さ、幅及び構造が変化すると共にEIも変化するため、この材料力学的方法はEI分布の測定に用いることができない。この理由から、A社では、デプスゲージを利用してスキーの各点の曲率半径を測定し、それぞれの点におけるEIを求める方法が一般に用いられている<sup>(2)</sup>。A社によると、この方法は簡便ではあるが精度的に無理があるとのことであり、もっと精度の良い方法が必要だとのことであった<sup>(3)</sup>。しかし、EI測定方法に関する報告は極めて少ないのが現状である。

本報告では、今回提案するEIの簡易測定方法と初等弾性理論に基づいた方法及び上記二方法により、スキーの素材から製作した三層積層板（模擬スキー）に対してEIを求め比較検討した結果、提案された方法がスキーのEI分布測定に対して有効な方法であることが確かめられたので報告する。

## II EIを求める方法

EIを求める方法として、今回は以下の方法を検討した。

### 1. 初等弾性理論による方法（以下①の方法と呼ぶ）

図1の複合材料の場合、以下の式<sup>(1)(付録1)</sup> からEIが求められる。

$$EI = b [E1 \{(d1 - yc)^3 + yc^3\} + E2 \{(t - d3 - yc)^3 - (d1 - yc)^3\} + E3 \{(t - yc)^3 - (t - d3 - yc)^3\}] / 3$$

$$y_c = [E_1 d_1^2 + E_2 \{(t - d_3)^2 - d_1^2\} + E_3 \{t^2 - (t - d_3)^2\}] / [2 \{E_1 d_1 + E_2 (t - d_1 - d_3) + E_3 d_3\}]$$

E<sub>i</sub>: ヤング率、b: 板幅、t: 板厚、  
y<sub>c</sub>: 下端面から中立面までの距離、d<sub>i</sub>: 素材の厚さ

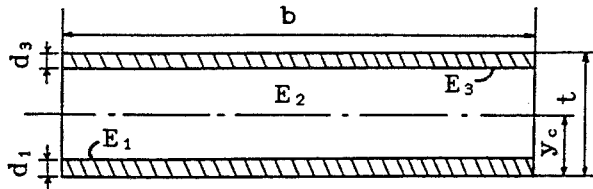


図1 三層の構成部材からなる材料の断面図

但し、この方法は、あくまで理論的方法であり、実際のスキークのEI分布測定には使用できない。

2. 材料力学の一般的測定方法 (以下②の方法と呼ぶ)

この方法は四点曲げ試験片の中央の垂直変位と曲げモーメントを測定することにより、EIを求める方法である。

図2の場合、以下の式<sup>(付録2)</sup>により求められる。

$$EI = Pa (3b^2 - 4a^2) / (48ya)$$

P: 荷重、b: 下部のスペン、ya: 中央の垂直変位

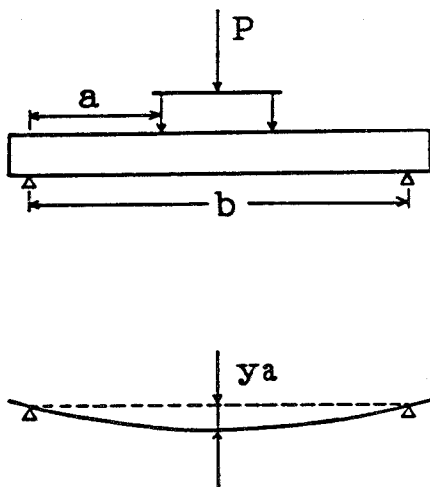


図2 四点曲げ試験における垂直変位

この方法は、はりのEIが一様であることを前提条件としているため、スキークのEI分布測定に適用することはできない。

3. A社で行われている測定方法 (以下③の方法と呼ぶ)

図3の中のybをデプスゲージで求め、以下の式に代入することにより求められる。

三平方の定理から、

$$\begin{aligned} (\rho - tu)^2 &= (\rho - tu - yb)^2 + (la/2)^2 \\ &= (\rho - tu)^2 - 2(\rho - tu)yb + yb^2 + la^2/4 \\ \rho &= tu + (4yb^2 + la^2) / (8yb) \end{aligned}$$

よって、

$$EI = \rho M$$

ρ: 中立面の曲率半径、

tu: 中立面から上端までの距離、

tl: 中立面から下端までの距離、

la: デプスゲージの幅、yb: デプスゲージの読み、

d: 板厚、

M: 曲げモーメント

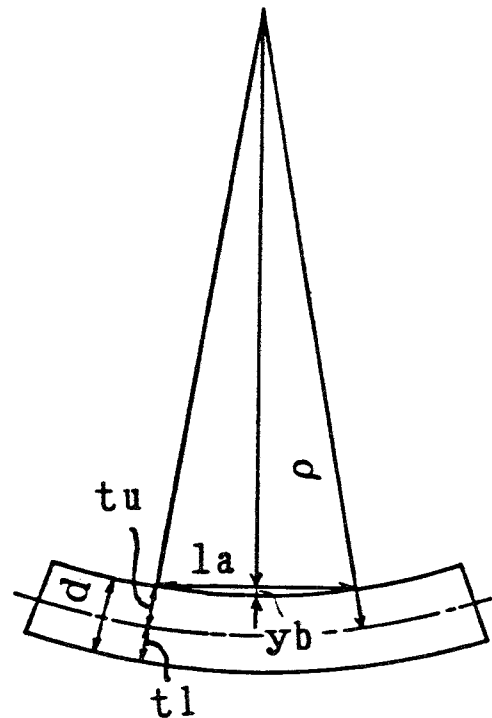


図3 曲げ試験におけるデプスゲージの読み

この方法は、中立面が事前に知られている必要があるが、スキーのEI分布の測定に適用できる。

#### 4. 提案する測定方法（以下④の方法と呼ぶ）

この方法は、求めようとする板の断面の上下端面のひずみとその部分の曲げモーメントが測定されれば簡単にEIを求めることができる方法である。

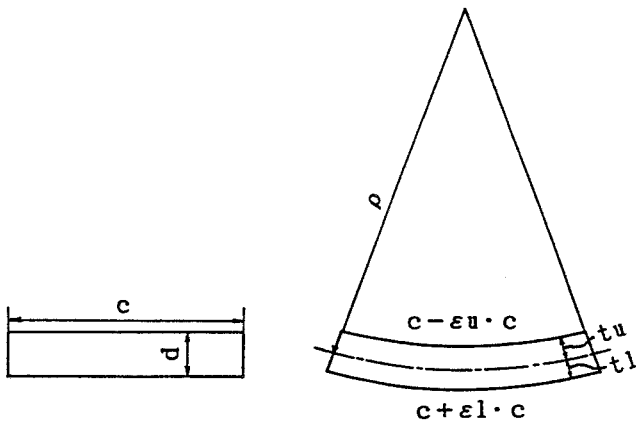


図4 曲げ試験における上下ひずみ

図4のように長方形板が変形する場合を仮定する。

$$\epsilon u = tu / \rho$$

$$\epsilon l = tl / \rho$$

なので

$$(\epsilon u + \epsilon l) = (tu + tl) / \rho$$

また  $(tu + tl) = d$  と仮定すると

$$\rho = d / (\epsilon u + \epsilon l)$$

よって、EIは、

$$EI = \rho M$$

により求められる。

$c$  : 変形前の材料の長さ、 $d$  : 変形前の材料の板厚、

$\epsilon u$  : 上ひずみ、 $\epsilon l$  : 下ひずみ、

$tu$  : 中立面から上端面までの距離、

$tl$  : 中立面から下端面までの距離、 $\rho$  : 曲率半径、

$M$  : 曲げモーメント

この場合、中立面の位置が分からなくてもEIを求めることができる。但し、変形は連続的でなければならない。また、電気抵抗線ひずみゲージを上下端面に貼ることができさえすれば、スキーのどの部分のEIの測定も可能であり、EI分布を求めることができる。

### III 模擬スキーを試験片とした試験

④の方法が妥当な方法であるかを確認するために、単純な形状（直方体）をした模擬スキーを製作し、それに対して上記の種々の方法でEIを測定し、比較検討を行った。

#### 1. 試験装置

図5のように、上部スパンを60mm、下部スパン（以降、スパンと呼ぶ時は下部スパンを意味する）を250mmとした四点曲げ試験装置が試作された。

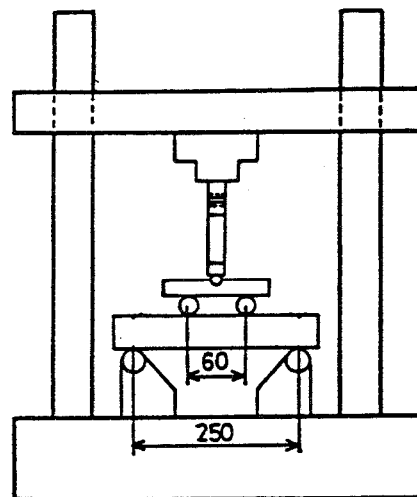


図5 試験装置（単位：mm）

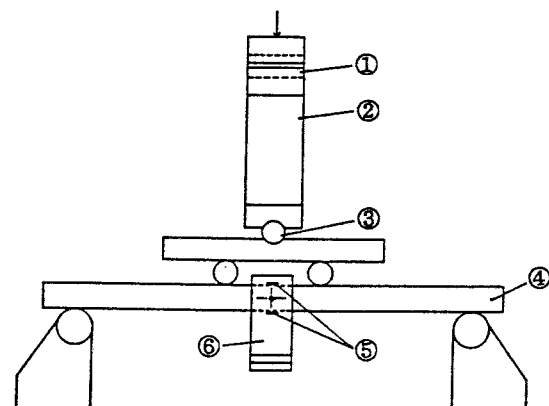


図6 試験装置（正面図）

図6は、図5の中央部分を拡大した図である。①が球座（上）、②がロードセル、③が球座（下）、④が試験

片、⑤が電気抵抗線ひずみゲージ、⑥が垂直変位検出用ジグである。垂直変位検出用ジグは、模擬スキーの上下端面に電気抵抗線ひずみゲージが容易に設置できると同時に垂直変位も測定できるように試作された。なお、この図の中央には差動トランスが設置されているのであるが、図が煩雑になるため省略されている。

図7は、図6の側面図である。⑦が差動トランス固定用ジグ、⑧が差動トランスである。

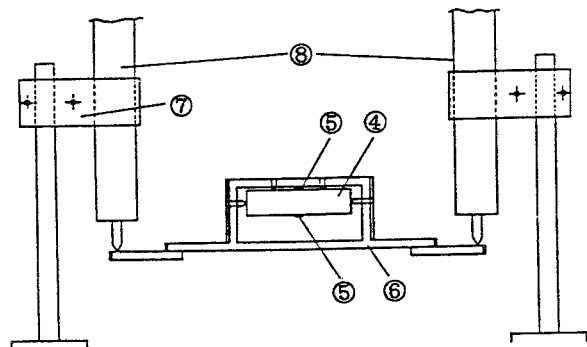


図7 試験装置 (側面図)

また、試験の際、荷重、板中央の垂直変位及び上下ひずみがロードセル、差動トランス及び電気抵抗線ひずみゲージでそれぞれ測定されペンレコーダに記録された。

なお、③の方法によるEIは、使用した試験片の表面が粗いために測定位置を少し移動しただけでybが0.03 mm程度変化したこと等から精度良く測定できないと判断されたため、今回は測定されなかった。

## 2. 試験片

スキー素材から製作した模擬スキー(三層積層板)を使用した。

図8は、その構造を示している。厚さ0.4mmのFRP材で発泡ウレタンをサンドイッチ状に挟んだ構造である。このような構造の材料の厚さと幅を変えて試験片を作成した。

表1に試験片の寸法を示す。

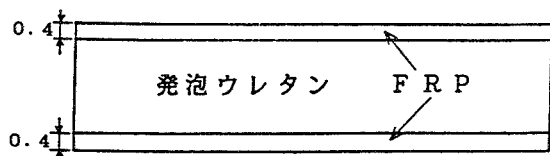


図8 三層積層板の構造 (単位: mm)

表1 試験片の寸法

試験片名	厚さ	幅
S3LBN01	18.15	65.73
S3LBN02	17.85	65.04
S3LBN03	12.11	64.30
S3LBN04	12.05	64.60
S3LBN05	17.91	71.85
S3LBN06	17.70	72.09
S3LBN07	18.09	79.03
S3LBN08	17.76	79.47

\*平均値 (単位: mm)

## 3. 試験結果

図9に、②の方法から求められたEIを示す。(模擬スキーの場合は、EIはほぼ一樣なので②の使用が可能) 縦軸がEI、横軸が最大曲げ応力(試験片中央の最下端の曲げ応力で、模擬スキーを一樣な材料と仮定して簡易的に求められたものである)である。

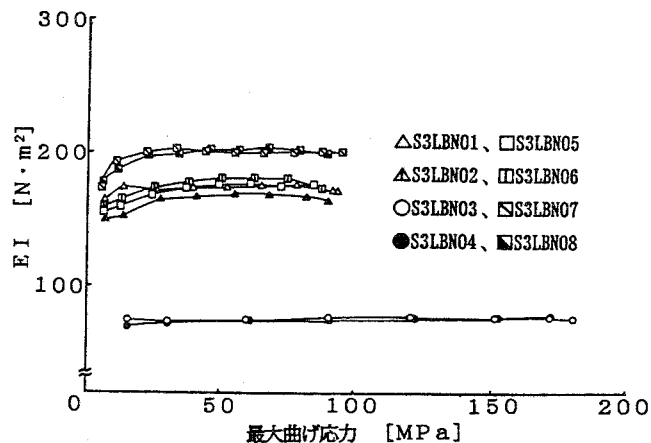


図9 ②の方法によるEIと最大曲げ応力の関係

S3LBN03とS3LBN04の試験片を除くと、EIが初め最大曲げ応力の増加と共に増加し、その後ほぼ一定となるが、降伏が近づくにつれて再び減少する。それに対し、S3LBN03とS3LBN04の場合は、EIは初めからほぼ一定となっている。なお、後者の場合は、降伏が発生する以前に、試験は終了された。

図10に、④の方法から求められたEIを示す。この場合も、S3LBN03とS3LBN04の試験片を除くと、EIが初め最大曲げ応力の増加とともに増加し徐々に一定となる傾向が全試験片に対して認められる。

これらの試験は弾性変形状態と考えられる領域で行われているので理想的にはEIは初めから一定と考えら

れる。

従って、EIが初め増加する現象は、試験片内部に存在する接着剤の欠落などの理由による隙間が荷重の増加と共に徐々に閉じながら次第に弾性変形状態に移行するためと推察される。

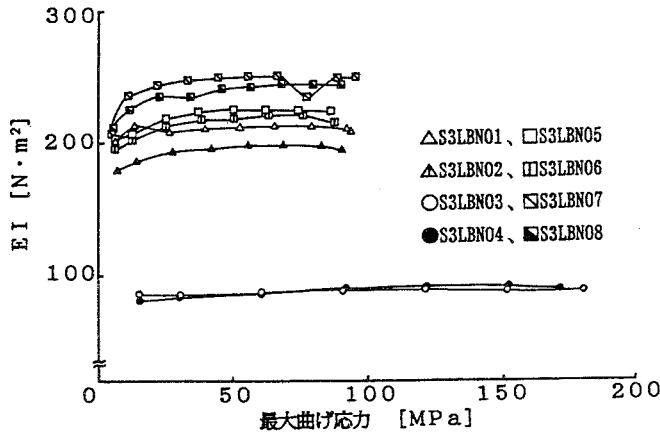


図10 ④の方法によるEIと最大曲げ応力の関係

表2に①によるEI、②によるEI及び④によるEIを示す。但し、②及び④のEIは、図9及び図10のEI-最大曲げ応力線図の水平部分の平均値である。

表2 各方法によるEI

試験片名	①の方法によるEI	②の方法によるEI	④の方法によるEI
S3LBN01	178.9	170.0	206.7
S3LBN02	169.9	163.7	192.5
S3LBN03	74.3	74.5	86.0
S3LBN04	73.9	74.9	87.0
S3LBN05	190.1	170.7	218.4
S3LBN06	190.8	174.0	214.5
S3LBN07	211.3	199.5	241.5
S3LBN08	206.7	197.3	235.7

(単位: N·m<sup>2</sup>)

表2を見ると、①と②のEIは、若干の差はあるもののほぼ一致していると考えられる。一方、④のEIは他の二つに比べて若干大きな値を示す傾向がある。この理由については、計測誤差等の方向から検討してみたが有力な手がかりを見い出すことはできなかった。

#### IV 測定されたEIの考察

図11に表2の②と④によるEIと①によるEIの関係を示す。

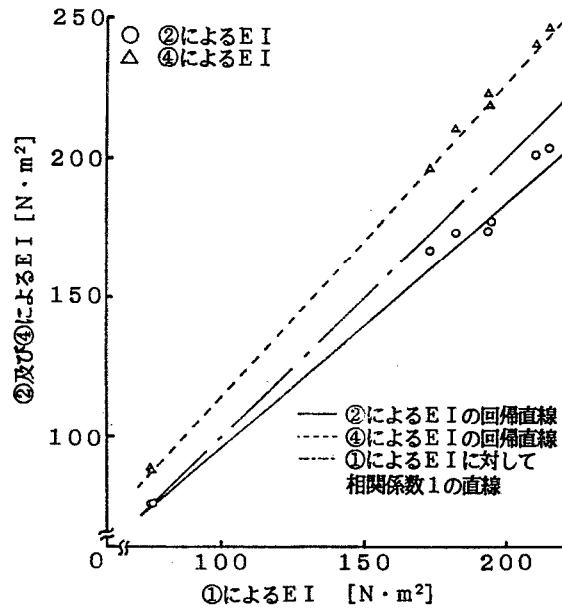


図11 EIの理論値と実験値の関係

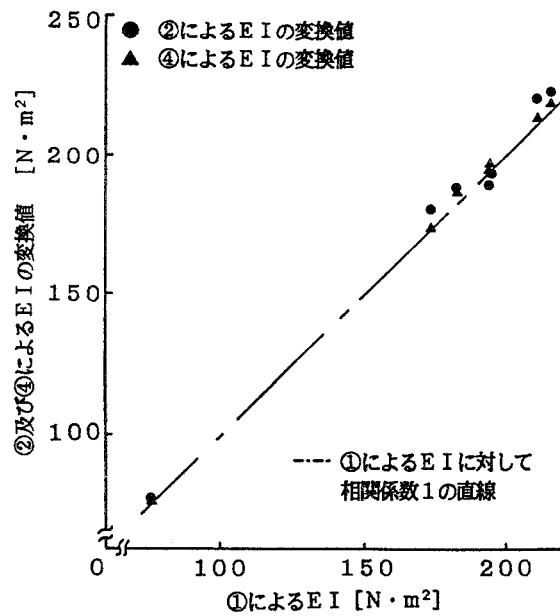


図12 EIの理論値と変換値の関係

○印は②によるEIと①によるEIの関係を示す。この場合、相関係数は0.997となり、両者の相関はかなり高いことが分かる。また、回帰分析を行うと決定係数0.993で次式となった。

$$y = 0.8933x + 8.5498 \quad \dots\dots\dots 1)$$

△印は④によるEIと①によるEIの関係を示す。これらの間の相関係数と決定係数はそれぞれ1.000、0.999であり、前者と比較するとより高い値であることが分

かる。また、回帰式は次式となった。

$$y = 1.1248x + 3.1665 \quad \dots\dots\dots 2)$$

相関係数が2つのデータの間の直線関係の強さの程度を示す指標であることと決定係数が回帰式に用いられた線形モデルがどの程度データに当てはまっているかを示す指標であることを考慮すると、④によるEIは②によるEIよりも①によるEIとの直線関係が強いことが分かる。

1) 式及び2) 式の回帰式を使って②及び④によるEIを①によるEIに変換することを試みた。

図12の●及び▲印はその変換値と①によるEIの関係を示したものである。両者とも相関係数が1の一点鎖線の回りに密に分布しているが、④の方がより密接であり、本研究の範囲内においては、④の方法が②の方法より精度の高いEIを与えるものと考えられる。

以上から、予め回帰式を求めておけば、②及び④の方法によるEIを①の方法から求められるEIに変換できることが確かめられた。

### V 有限要素解析による考察

次に、②及び④によるEIを二次元の有限要素解析を用いて検討する。

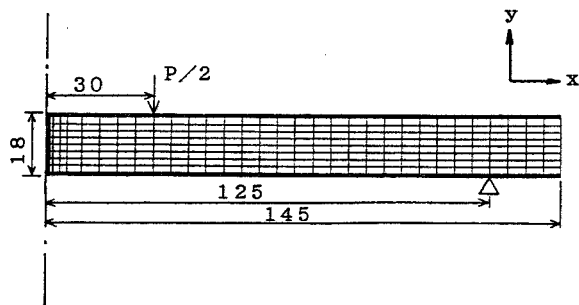


図13 要素分割図 (要素数726、P = 980N)

図13は計算に使用した要素分割図であるが、左右対称であることから中心線の右側半分のみを示している。要素については四角形の一次要素を用いた。要素数は726個、矢印は荷重で490N (= P/2) である。中心線(図の左端)上の節点でx方向固定、y方向自由、支持の節点でx方向自由、y方向固定、その他の節点でx、y方向自由となっている。

単一材料と複合材料の二つの場合に計算を行った。単一材料の時は発泡ウレタン単体と考えてヤング率を845MPa、ポアソン比を0.3とした。複合材料の時は

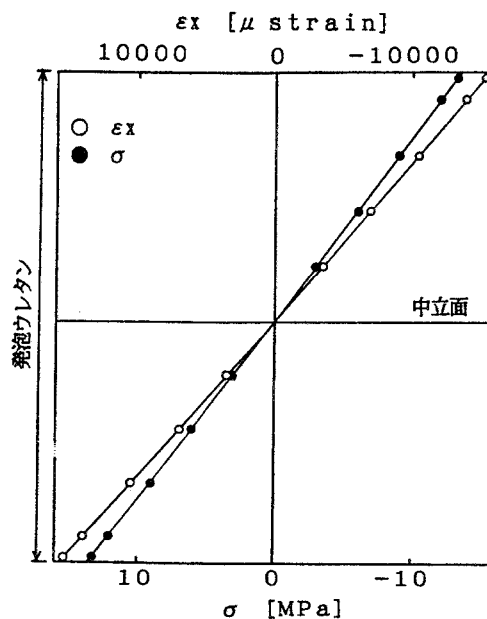


図14 単一材料の曲げ応力及びX方向ひずみ分布図

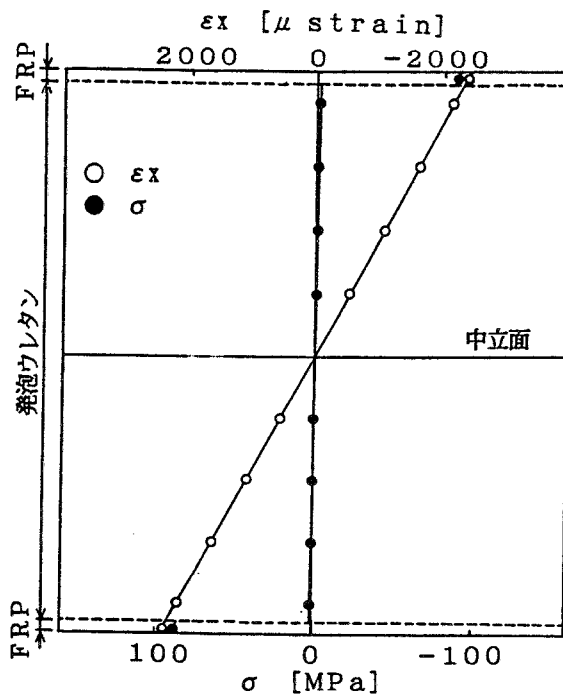


図15 複合材料の曲げ応力及びX方向ひずみ分布図

FRPのヤング率を37240MPa、発泡ウレタンのそれを845MPaとし、ポアソン比については両者とも0.3とした。厚さ及び幅はそれぞれ18mm、65mmであった。

また、単一材料の場合に、分割図の中立面の中心において弾性論と有限要素解析により求めた値を比較した結果、精度が98.9%であった。

図14及び図15は、それぞれ単一材料と複合材料に対して求められた曲げ応力 ( $\sigma$ : ●印) 及びx方向ひずみ ( $\epsilon_x$ : ○印) 分布図である。

単一材料の場合は、x方向ひずみ及び曲げ応力とも連続的で且つ直線的に変化しているが、複合材料の場合は、x方向ひずみは連続で且つ直線的であるが曲げ応力はFRP材と発泡ウレタン材の境界で不連続に変化していることが分かる。

④の方法ではx方向ひずみが直線的に且つ連続的に変化することが前提条件になっていることを考えると、上記のことは④の方法の妥当性を示唆している。

表3及び表4に、有限要素解析に用いたモデルに対して①の方法から求められたEIと有限要素解析の結果から求められた②、③及び④によるEIを示す。

表3 有限要素モデルのEI

	①の方法によるEI	②の方法によるEI	④の方法によるEI
単一材料	26.7	26.4	26.8
三層積層板	173.3	161.2	173.6

(単位:  $N \cdot m^2$ )

表4 有限要素モデルの③の方法によるEI

	la		
	20mm	40mm	60mm
単一材料	27.0	27.1	27.5
三層積層板	169.6	172.7	188.4

(単位:  $N \cdot m^2$ )

これらを見ると(③については、la = 20mmのEIを比較した)、単一材料の場合は、四者はほぼ一致しているが、三層積層板の場合は、②のEIが他に比べて小さく、実験結果と若干異なる傾向を示している。

材料が理想的な弾性変形をする場合は、①、②及び④のEIは、ほぼ一致すると考えられるが、本試験の範囲内においては、以上のような差が認められる。この理由については、今後検討して行きたい。

また、③のEIに対するlaの影響を見ると、laが小さくなるほど、EIの値も小さくなる傾向が認められる。これは、③の方法が基本的にはりの弾性曲線の曲がり方を曲率半径で表す方法であるためと考えられる。

すなわち、はりの曲率半径は、ある点で定義されるべきものと考えられるのに対し、ある距離laの間で測定された曲率半径にはlaが大きいほど誤差が含まれ易くなる。従って、この場合は、laが小さくなるほど真のEIを示すものと考えられる。

以上から、今回提案した④の方法によるEIは、単一材料及び三層積層板の両者において、理論的な値である①のEIとほぼ一致し、合理的な方法であることが確かめられた。

## VI 実際のスキーへの応用

④の方法をスキーのEI測定に試してみた。

試験装置は、前述のものを使用した。ただ、スパンについては、250mmと500mmを使用した。

試験片については、A社から、SA、SB及びSCの三種類のスキーを提供してもらい、それらの中央部分を切断して試験に供した。

SAは上下面の両側にエッジを持つスキーである。SBは下面にのみエッジを持つ。SCも下面にのみエッジを持つが、曲げ剛性においてSBよりも若干小さく設計されたものである。

表5に試験片の寸法及びスパンを示す。

なお、スキーの試験片については、市販のスキーを使用したため試験片の数を多くできなかったことを予め断っておく。

表5 試験片の寸法及びスパン

試験片名	厚さ	幅	長さ	スパン
SA-10	15.89	65.24	540	500
SA-11	15.30	64.86	290	250
SB-9	19.55	65.95	540	500
SB-10	20.04	65.45	290	250
SC-14	19.45	65.81	540	500
SC-15	20.06	65.62	290	250

\*平均値 (単位: mm)

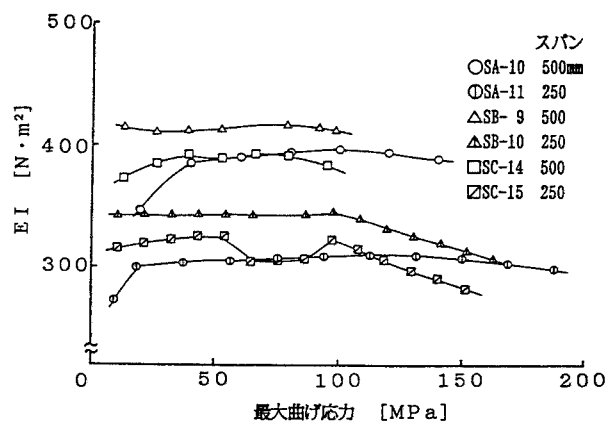


図16 ②の方法によるEIと最大曲げ応力の関係

図16に、②の方法から求められたEIと最大曲げ応力の関係を示す。但し、②の方法はEIが一様なはりでなければ適用できないため、図のEIはスキー試験片全長のEIの平均値を示すものである。

図から、EIは、SB9、SB10及びSC15の場合は初めからほぼ一定となり、その後、降伏が近づくにつれて徐々に減少する傾向を示しているが、他の場合は、初め最大曲げ応力の増加と共に増加した後ほぼ一定となり、その後再び減少する。同種のスキーをみると、スパンが大きい方のEIがスパンが小さいものより大きい値を示している。これについては、今後検討しなければならないと考えている。

図17に、④の方法から求められたEIを示す。この場合、電気抵抗線ひずみゲージはスキー試験片中央の上下端面に貼られたので、EIはスキー試験片中央部のものである。

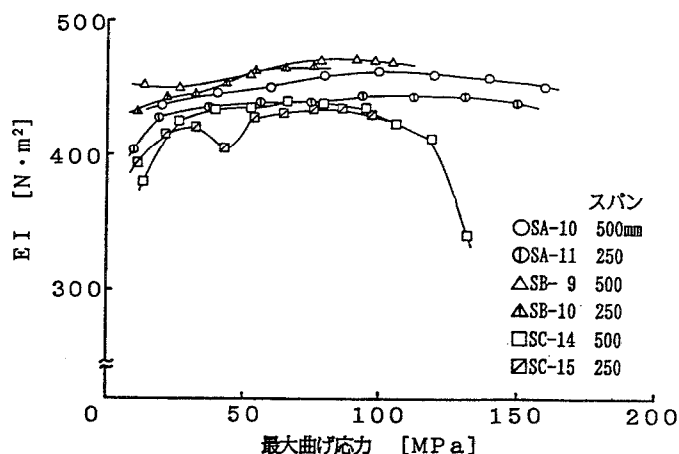


図17 ④の方法によるEIと最大曲げ応力の関係

図から、EIは初めに増加し徐々に一定となり、その後減少に転じる傾向を示している。また、同種のスキーの場合、スパンの影響は若干認められるが誤差程度である。

実際のスキーのEI分布を測定する時は、スパンはほぼ決まっているので、スパンの影響はそれほど大きな問題ではないように考えられるが、大人用のスキーと子供用のスキーを比較するような場合には、注意をする必要があると思われる。

また、図9及び図10に比べると、一定となるところがあまり明瞭にならない傾向がある。これは、模擬スキー（三層積層板）がほぼ直方体であるのに対し、スキーは厚さと幅及び構造が微妙に変化している板であることが一つの理由ではないかと考えられる。

表6に②によるEI及び④によるEI並びにそれらの①

のEIへの変換値を示す。但し、EIは、図16及び図17のEI - 最大曲げ応力線図の水平部分の平均値である。

表6 スキーのEI

試験片名	②の方法によるEI	④の方法によるEI	②によるEIの変換値	④によるEIの変換値
SA-10	391.6	452.7	428.8	399.7
SA-11	306.4	438.7	333.4	387.2
SB-9	413.4	463.0	453.2	408.8
SB-10	342.8	455.8	374.2	402.4
SC-14	390.1	434.4	427.1	383.4
SC-15	321.7	427.4	350.6	377.2

(単位: N · m<sup>2</sup>)

④によるEIと他の方法により求めたEIを比較する時は、①のEIへの変換が必要となるが、方法が同じ時、例えば、方法が④の方法に固定した時は、スキーの設計においては特に変換する必要はなくなる。

以上から、④の方法で実際のスキーのEIを測定できることが明らかとなった。

## VII 結言

以上から以下のことが明らかになった。

- 1) 模擬スキー（三層積層板）においては、④によるEIは①や②によるEIに比べ若干大きな値をとる傾向があった。これについてはいろいろと検討したが有力な手がかりは見つからず、測定方法の違いによるものではないかと考えている。
- 2) ②によるEIと①によるEIの間の相関係数と決定係数はそれぞれ0.997、0.993、また④によるEIと①によるEIの間では、それぞれ1.000、0.999となった。その結果、後者の関係が前者より緊密であることが明らかになった。
- 3) ④によるEIと①によるEIの間の回帰式を使うことにより④によるEIから①によるEIに相当するEIを求めることができることが確かめられた。  
この結果、④のEIが①及び②のEIより大きな値をとる傾向は、実際の測定においては、問題とならなくなった。
- 4) 有限要素解析から、単一材料モデルでは、①、②、③及び④によるEIはほぼ一致し、また三層積層板モデルでは、②のEIが若干小さくなる傾向が認められたものの他のEIはほぼ一致したことから、④による方法は合理的な方法であると考えられた。



また、③の方法ではlaをできるだけ小さくする必要があったことが分かった。

5) ④による方法で、実際のスキーのEIを測定できることが分かった。

これらのことから、今回提案された上下ひずみからEIを求める方法、すなわち④の方法は、スキーのEI分布を測定する方法として有効であることが分かった。

今後は、この方法を用いて実際のスキーのEI分布を求め③の方法で求められたものと精度の比較を行う予定である。

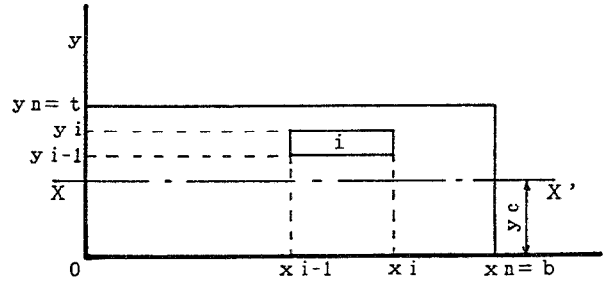
最後に、本報告をまとめるにあたり御協力をいただいた佐竹正敏教官、成田敏明教官及び池田正儀教官に謝意を表します。

### 参考文献

- (1) 棚橋良次、スキーの設計、複合材料設計、第1巻、第1号、1981年、p83-103
- (2) ㈱青森スキー製作所、社内技術指針、1982年
- (3) ㈱青森スキー製作所、社内報告、1990年3月

### 付録

(付録1) ①の方法で用いる式の導出<sup>(1)</sup>



付録図1 n個の矩形断面の構成部材からなる断面図 (X-X'は中立軸、ここでは構成部材iのみが描かれている)

付録図1において、n個の矩形断面の構成部材に、1, 2, 3, …… n と名付ける。

$$E_i$$

$$dx_i = x_i - x_{i-1}$$

$$dy_i = y_i - y_{i-1}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

但し、 $E_i$  : i番の材料の弾性率 (MPa)  
 $\Delta x_i$  : i番の材料の幅 (mm)  
 $\Delta y_i$  : i番の材料の厚み (mm)

構成部材iの中立軸X-X'に対する断面二次モーメント $I_i$ は、

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{i-1}}^{y_i} (y - y_c)^2 dx dy$$

$$= \{(y_i - y_c)^3 - (y_{i-1} - y_c)^3\} \Delta x_i / 3 \dots \dots \dots (1)$$

よって、全体のEIは、

$$EI = \sum_{i=1}^n E_i I_i$$

$$= 1/3 \times \sum_{i=1}^n E_i \{(y_i - y_c)^3 - (y_{i-1} - y_c)^3\} \Delta x_i \dots \dots \dots (2)$$

次に、中立軸X-X'までの距離 $y_c$ を求める。構成部材iの位置yにおけるひずみは、付録図2から、

$$\epsilon_{z,i} = (y - y_c) / \rho \dots \dots \dots (3)$$

$$(y_{i-1} \leq y \leq y_i)$$

但し、 $\rho$  : 曲げモーメントの作用によって生ずる中立面の曲率半径

応力  $\sigma_{z,i} = E_i \epsilon_{z,i}$  の釣り合いの式から、

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \sigma_{z,i} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(∵ z 方向の力は0となる。)

(3) と  $\sigma_{z,i} = E_i \epsilon_{z,i}$  及び (4) より、 $y_c$  を求めると、次式のようなになる。

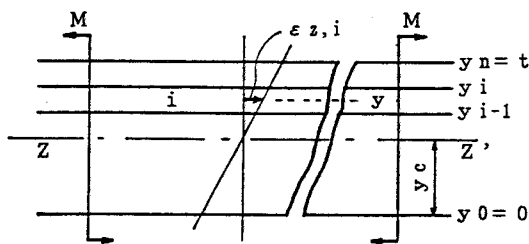
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n E_i (y_i^2 - y_{i-1}^2) (x_i - x_{i-1})}{\left\{ \sum_{i=1}^n E_i (y_i - y_{i-1}) (x_i - x_{i-1}) \right\}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

(2) と (5) を、図1の場合に当てはめると、

$$EI = b [E_1 \{(d_1 - y_c)^3 + y_c^3\} + E_2 \{(t - d_3 - y_c)^3 - (d_1 - y_c)^3\} + E_3 \{(t - y_c)^3 - (t - d_3 - y_c)^3\}] / 3$$

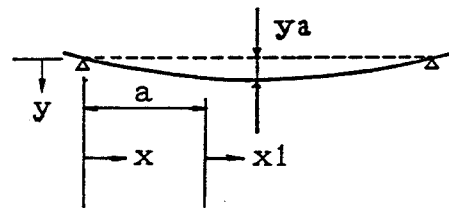
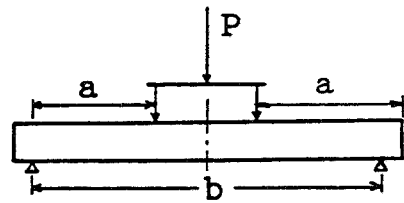
$$y_c = [E_1 d_1^2 + E_2 \{(t - d_3)^2 - d_1^2\} + E_3 \{t^2 - (t - d_3)^2\}] / [2 \{E_1 d_1 + E_2 (t - d_1 - d_3) + E_3 d_3\}]$$

となる。



付録図2 モーメントMの作用により構成部材 i に生じるひずみ  $\epsilon_{z,i}$  及び中立軸までの距離  $y_c$  を求める基本図

(付録2) ②の方法で用いる式の導出



付録図3 四点曲げ試験

付録図3において、

・  $x = 0$  から  $x = a$  の範囲においては、次式が成り立つ。

$$EI d^2 y / dx^2 = -Px / 2$$

$$EI dy / dx = -Px^2 / 4 + C_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$EI y = -Px^3 / 12 + C_1 x + C_2$$

$x = 0$  のとき  $y = 0$  なので、 $C_2 = 0$  となる。

よって、

$$EI y = -Px^3 / 12 + C_1 x \quad \dots\dots\dots (7)$$

・ また、 $x = a$  から  $x = b - a$ 、すなわち  $x_1 = 0$  から  $b - 2a$  の範囲では、次式が成り立つ。

$$EI d^2 y / dx_1^2 = -Pa / 2$$

$$EI dy / dx_1 = -Pax_1 / 2 + C_3 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$x_1 = (b/2 - a)$  のとき  $dy / dx_1 = 0$  になる

ので、

$$C_3 = Pa (b/2 - a) / 2$$

よって、

$$EI y = -Pax_1^2 / 4 + Pa (b/2 - a) x_1 / 2 + C_4 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$x = a$  ( $x_1 = 0$ ) のとき、(6)と(8)、(7)と(9)はそれぞれ等しいので、

$$-Pa^2 / 4 + C_1 = Pa (b/2 - a) / 2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$-Pa^3 / 12 + C_1 a = C_4 \quad \dots\dots\dots (11)$$

(10) から、

$$C_1 = Pa (b - a) / 4 \quad \dots\dots\dots (12)$$

(11) と (12) から、

$$C4 = Pa^2 (3b - 4a) / 12$$

よって、

・  $x = 0$  から  $x = a$  では、

$$y = \left\{ -Px^3/12 + Pax(b-a)/4 \right\} / EI$$

.....(13)

・  $x = a$  から  $x = b - a$  では、

$$y = \left\{ -Pax1^2/4 + Pax1(b/2 - a)/2 + Pa^2(3b - 4a)/12 \right\} / EI$$

.....(14)

$y$  は  $x = b/2$  すなわち  $x1 = (b - 2a) / 2$  のとき最大値をとるので、(14) より、

$$ya = Pa(3b^2 - 4a^2) / (48EI)$$

すなわち、

$$EI = Pa(3b^2 - 4a^2) / (48ya)$$

となる。