〈報文〉

楕円曲線のQ(T)-rankに関する予想

滋賀職業能力開発短期大学校　　長　尾　孝　一

On a Conjecture of Q(T)-rank of Elliptic Curve

Kōichi NAGAO

要約　有理数体Qや有理関数体Q(T)上定義された楕円曲線の有理点やQ(T)有理点の作る群については、Mordell Weilの定理によって、それらが有限生成アーベル群となることが知られている。以下、これらの群のfree-rankを簡単にrankと言う事にする。Q上定義された楕円曲線のrankに関しては有名なBirch, Swinnerton-Dyer予想がある。ここでは、この予想をいじることによって、有理関数体Q(T)上定義された楕円曲線のrankに関してその近似を与えることのできる予想を作る。又、特殊な場合において予想が正しく、又、計算機による数値実験を仮定すると予想が正しい場合があることをしめす。そして最後に、この予想と有名なTateの予想との関係を述べる。

§1．序、結果

記号Q上定義された楕円曲線Eに対して

$a_p=a_p(E)=p+1-\#E(F_p)$, α_p, $\overline{\alpha}_p$ を

$(1-\alpha_p T)(1-\overline{\alpha}_p T)=1-a_p T+pT^2$,

$b(p,m)=\alpha_p^m+\overline{\alpha}_p^m\ (m\in N)$,

$L_E(s)=\prod_{p:素数}(1-a_p p^{-s}+p^{1-2s})$,

とおく。

また、Q(T)上定義された楕円曲線$\mathcal{E}$に対して、変数Tを有理数tによって特殊化して得られるQ上定義される楕円曲線をE_tとする。

また、$A_p=A_p(\mathcal{E})=\sum_{t=0}^{p-1}a_p(E_t)/p$ とおく。

この論文では、次の予想について考察する。

<u>予想</u>　「Q(T)上定義された曲線$\mathcal{E}$がQ上では定義されていない時、

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数,\le N}-A_p\cdot\log(p)$$ は$\mathcal{E}$のQ(T)-$rank$に収束する。」⊙

この予想が出来た経緯としてまず、Q上定義された楕円曲線に関するBirch, Swinnerton-Dyer予想について述べる。

<u>Birch, Swinnerton-Dyer予想</u>　「楕円曲線E、に対して、そのL関数$L(s)$は有理型関数として複素平面全体に解析接続でき、その$s=1$での零点の位数がEのrankとなる。」⊙

このとき、$L(s)$の対数微分$L'(s)/L(s)$ を考える。

こうすると、rankは$s=1$での留数$res_{s=1}L'(s)/L(s)$と書けるので扱いやすい。

実際、$f_m=\sum_{p:素数}-\log(p)\cdot b(p,m)\cdot p^{-ms}$とおくと、$L'(s)/L(s)=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(s)$ とかけ、次のことがわかる。

1. $\sum_{m\ge 3}f_m(s)$ は$\Re s\ge 1$で収束する。
   ($|b(p,m)|\le 2p^{m/2}$ より、わかる。)
2. 佐藤予想を仮定すると、
   $\lim_{s\to 1+0}(s-1)\cdot f_2(s)=1/2$がわかる。
   (§3　で示す。)

よって、Eのrankは$rank=0.5+res_{s=1}f_1(s)$となることが、予想できる。

以下、Q(T)上定義された楕円曲線$\mathcal{E}$に対して我々の予想を導くためad-hocな議論を試みる。まず、Q上定義された楕円曲線の族$\{E_t\mid t\in Z\}$に含まれる曲線のrankの平均を考察する。$f_1(s)=\sum-a_p\cdot\log(p)\cdot p^{-s}$に注意するとそれぞれの曲線に対して、

論文受付日　1994. 6. 1

$rank\ of\ (E_t)=0.5+res_{s=1}\{\sum -a_p(E_t)\cdot\log(p)\cdot p^{-s}\}$ と書けるためこの族に含まれる曲線のrankの平均は $0.5+res_{s=1}\sum\{-\{a_p(E_t)\text{の平均}\}\cdot\log(p)\cdot p^{-s}\}$ と書かれると予想される。また、$t\equiv s \bmod p$ の時 $a_p(E_t)\equiv a_p(E_s)$ に注意すると、これは
$0.5+res_{s=1}\sum\{-A_p(\mathcal{E})\cdot\log(p)\cdot p^{-s}\}$ と書けると予想される。

命題 1－1 (Abel)
「ディリクレ級数 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$ （a_n は実数）が $\Re(s)>1$ で収束し $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N}a_n$ が収束する時

$$\lim_{s\to 1+0}(s-1)\cdot f(s)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N}a_n$$

が成り立つ。」⊙

実験的に具体的な例において
$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\le N}-A_p\cdot\log(p)$ は収束する。よって、上の族に含まれる曲線のrankの平均は
$0.5+\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\le N}-A_p\cdot\log(p)$
とかけると予想され、この値が $\mathcal{E}$ の $Q(T)$-rank と関係があると思えることより我々は上の予想を得た。

この予想に関して筆者は次のような結果を得た。

$f(X)\in Z(X)$ を重根を持たないmonicな三次式とする。

定理1「$Q(T)$ 上定義された楕円曲線 $Y^2=f(X)+T$, ($Q(T)$-$rank=0$) に関して予想は成立する」。⊙
（この時、「$A_p=0$」が　任意の素数 p で成り立つことが簡単にわかる。）

定理2「$Q(T)$ 上定義された楕円曲線 $Y^2=f(X)+T^2$, ($Q(T)$-$rank$ は $F(X)$ が既約、二次式×一次式に分解、一次式×一次式×一次式に分解の時それぞれ 0, 1, 2 となる）に関して予想は成立する」。⊙

$$\mathcal{E}_{E6}: Y^2=X^3+(-381\cdot T^2+202752\cdot T-36577584)X +T^4+427420\cdot T^2-319993344\cdot T+61357067136.$$

$$\mathcal{E}_{E7}: Y^2+3^8\cdot(T^3-2716410100150129/27\cdot T -2817154908686774357 51762/(3^6))X +3^{12}\cdot(8878/3\cdot T^4+1195761874250/27\cdot T^3 +16664903183774046 86/9\cdot T^2 +2019396054926784580190 3566/(3^7)\cdot T -172191056837841861966655934915136 16/(3^9)).$$

$$\mathcal{E}_{E8}: Y^2=X^3+3^4\cdot(-310\cdot T^3+243896065\cdot -60857017136860\cdot T+139361809867806374 84/3)X +3^6\cdot(T^5-2763436738910/3\cdot T^3 +168130020745291754 0/3\cdot T^2 -384550638908428401057560/3\cdot T +282412962406880649939736350128/27).$$

とする。これは、塩田 [1] によって作られた、$Q(T)$-rankがそれぞれ 6, 7, 8 の例である。（これらの例では $Q(T)$-rank ＝ $\overline{Q}(T)$-rank である。）
上の三つの例で計算機による実験をすることにより、つぎの観察を得る。

観察1「十分大きな素数 p に対して $Q(T)$-rank＝$-A_p$ が成立しているように思われる。」⊙

定理3「この観察を仮定すると上の予想が $\mathcal{E}_{E6}$, $\mathcal{E}_{E7}$, $\mathcal{E}_{E8}$ について成立する。」⊙

$\mathcal{E}_{k3}: Y^2=X^3-3T^4X-T^2(1+T^8)$, とおく。
（$Q(T)$-rank ＝ 1が桑田 [2] によって知られている。）についての実験よりつぎの観察を得る。

観察2「この曲線について

$$A_p=\begin{cases}2 & p\equiv 3 \mod 4,\ p\ne 3\text{の時}\\ -4b^2/p & p\equiv 5 \mod 8\text{の時}\\ (-4b^2-4p)/p & p\equiv 1 \mod 8\text{の時}\end{cases}$$

が成り立つと思われる。
ただし、b は $p=a^2+b^2$ (a 偶数, b 奇数)を満たす唯一の自然数とする。」⊙

定理4「これを仮定すると上の予想は $\mathcal{E}_{k3}$ に関して成立する。」⊙

§ 2　素数の密度

ここでは、定理の証明の為に素数の密度に関する結果を準備する。
記号 $\pi(N)$ を自然数 N 以下の素数の個数とおく。また、素数の部分集合 M と自然数 N に対して、
$M(N)=\{p\in M\mid p\le N\}$ とおく。また、
$d(M)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\in M(N)}1$
$\sigma(M)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p\in M(N)}\log(p)$
とおく。

命題 2－1「$d(M)$, $\sigma(M)$ のうち一方が収束するとき他方も収束し、その値は等しい。」⊙

ここでは、もっと一般につぎを示す。

補題 「素数をindexにもつ非負、有界な数列$\{c_p\}$に対して、

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p:素数\le N}c_p,\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数\le N}\log(p)\cdot c_p$$

はその一方が収束するとき他方も収束し、その値は等しい。」⊙

証明 $|c_p|<K$とする。また、

$\vartheta(N)=\sum_{p:素数\le N}\log(p)\cdot c_p$, $V(N)=\sum_{p:素数\le N}c_p$, とおく。

ここで、$\vartheta(N)<\log(N)\cdot V(N)$ がわかる。

また、$0<\delta<1$ を満たす任意の δ に対して

$$\begin{aligned}\vartheta(N)&\ge\sum_{N^\delta<p<N}\log(p)\cdot c_p\\&\ge\delta\cdot\log(N)\cdot\sum_{N^\delta<p<N}c_p\\&=\delta\cdot\log(N)\cdot\sum_{p<N}c_p-\delta\cdot\log(N)\cdot\sum_{p<N^\delta}c_p\\&\ge\delta\cdot\log(N)\cdot\sum_{p<N}c_p-K\cdot N^\delta\cdot\log(N)\\&=\delta\cdot\log(N)\cdot V(N)-K\cdot N^\delta\cdot\log(N)\end{aligned}$$

がわかる。

よって、素数定理$(\pi(N)\sim N/\log(N))$より、

$$\limsup_{N\to\infty}\vartheta(N)/N\le\liminf_{N\to\infty}V(N)\cdot\log(N)/N$$
$$=\liminf_{N\to\infty}V(N)/\pi(N)$$
$$\liminf_{N\to\infty}\vartheta(N)/N\le\limsup_{N\to\infty}\delta\cdot V(N)\cdot\log(N)/N$$
$$=\limsup_{N\to\infty}\delta\cdot V(N)/\pi(N)$$

がわかる。q.e.d.

上の命題より次を得る。

系 2－1 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数\le N}\log(p)=1$ ⊙

この系より我々は簡単に定理1、定理3の証明を得る。

一方、有限次代数体Kに対して、

$c_p=c_p(K)=\#\{ノルムが\ p\ であるKの素イデアル\}$

と置く。

命題 2－2 「$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p:素数\le N}c_p$

$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数\le N}\log(p)\cdot c_p=1$ が成り立つ。」⊙

証明 三井［3］p.65定理3．4．7より

$\sum_{\mathfrak{p}:Kの素イデアルN\mathfrak{p}\le N}\log(N\mathfrak{p})=N+O(N\cdot\exp^{-c\cdot\sqrt{\log N}})$

がわかる。

これと、命題 2－1 よりこの命題を得る。q.e.d.

上の命題より次を得る。

系 2－2

$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数\equiv1\bmod 4,\le N}\log(p)$

$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数\equiv3\bmod 4,\le N}\log(p)=1/2$,

$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数\equiv1\bmod 8,\le N}\log(p)=1/4$ ⊙

証明

$K=Q(\sqrt{-1})$及び、$K=Q(\sqrt{-1},\sqrt{2})$の時に上の命題を使えば良い。q.e.d.

§3 佐藤予想

記号 Q上定義された楕円曲線Eに対して

$$c_m=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p:素数\le N}b(p,m)/p^{m/2}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:素数\le N}\log(p)\cdot b(p,m)/p^{m/2},\ (m\ge1)$$

とおく。（等号は$|b(p,m)|<p^{m/2}$と命題 1－1よりわかる。）

このとき、山本［4］より次がわかる。

命題 3－1 「EがCM-型の時、$c_{2m}=(-1)^m, c_{2m-1}=0$, $(m\ge1)$が成り立つ。」⊙

予想3－1（佐藤予想） 「EがCM-型でない時、

$$c_m=\begin{cases}-1 & m=2\ の時\\ 0 & その他の時\end{cases}$$

が成り立つ。」⊙

この予想により次がわかる。

命題 3－2 「佐藤予想の下で

$\lim_{s\to1+0}(s-1)\cdot f_2(s)=1/2$ がわかる。」⊙

証明 $-1=c_2=\frac{1}{N}\sum_{p:素数\le N}\log(p)\cdot b(p,2)$ より

$g(s)=\sum_{p:素数}\log(p)\cdot B(p,2)\cdot p^{-1-s}$ とおくと、

命題 1－1 より $\lim_{s\to1+0}(s-1)\cdot g(s)=-1$ がわかる。

また、$f_2(s)=-g(2s-1)$ より上がわかる。 q.e.d.

§4 Q(T)−rank

記号 $f(X)\in Z[X]$を重根を持たないmonicな三次式とする。

また、$f(X)=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\overline{Q})$とおく。

ここでは、以下を示す。

命題 4－1　「$\mathcal{E}: Y^2=f(X)+T$ の $\mathrm{Q}(T)$-rank は0。」⊙

命題 4－2　「$\mathcal{E}: Y^2=f(X)+T^2$ の $\mathrm{Q}(T)$-rank は $f(X)$ が既約、二次式×一次式に分解、一次式×一次式×一次式に分解の時それぞれ 0, 1, 2 となる。」⊙

補題（塩田 [1]）「k を標数が2, 3でない完全体とする。b_1, b_2, b_3 を相異なる K の元とする。このとき、$K=k(T)$ 上定義された楕円曲線
$Y^2=(X-b_1)(X-b_2)(X-b_3)+T^2$
の rank は2で、torsion はなく、その生成元は
$P_1=(b_1, T),\ P_2=(b_2, T)$ である。」⊙

命題 4－1の証明　$K=\mathrm{Q}(\sqrt{T}, \alpha, \beta, \gamma)$ とおく。
σ を $\sqrt{T}\to-\sqrt{T}, \alpha, \beta, \gamma$ 不変をみたす $Gal(K/\mathrm{Q}(T))$ の元とする。

$$(n_1P_1+n_2P_2)^\sigma=n_1P_1^\sigma+n_2P_2^\sigma=-n_1P_1-n_2P_2$$

より $\mathcal{E}(K)$ の元で σ 不変な元は ∞ のみであることがわかる。

命題 4－2の証明　$f(X)$ が三つの一次式の積に分かれる時、$(\alpha, \beta, \gamma\in\overline{\mathrm{Q}})$ 上の補題より rank ＝2が直ちにわかる。$f(X)$ が二次式と一次式の積に分かれる時、$(\alpha, \beta, \gamma\in\overline{\mathrm{Q}}$ とおく）$K=\mathrm{Q}(\beta, T), \sigma$ を $\beta\to\gamma$ を満たす $Gal(K/\mathrm{Q}/(T))$ の元とする。

$$(n_1P_1+n_2P_2)^\sigma=n_1P_1^\sigma+n_2P_2^\sigma=n_1P_1-n_2P_2$$

より $\mathcal{E}(K)$ の元で σ 不変な元は $P_1(\in\mathcal{E}(\mathrm{Q}(T)))$ の整数倍とかけることがわかる。$f(X)$ が既約の時、$(\alpha, \beta, \gamma\in\overline{\mathrm{Q}}$ である）$K=\mathrm{Q}(\alpha, \beta, T), \sigma$ を $\alpha\to\beta, \beta\to\gamma$ を満たす $Gal(K/\mathrm{Q}(T))$ の元とする。

$$\begin{aligned}(n_1P_1+n_2P_2)^\sigma&=n_1P_1^\sigma+n_2P_2^\sigma\\&=n_1P_2+n_2(-P_1-P_2)\\&=-n_2P_1-(n_1+n_2)P_2\end{aligned}$$

より $\mathcal{E}(K)$ の元で σ 不変な元は ∞ のみであることがわかる。q.e.d.

§5　定理2の証明

$\mathcal{E}: Y^2=f(X)+T^2$ とする。

補題「$f(X)\bmod p$ が重根をもたない p に対して

$$-A_p=\begin{cases}2, & f(X)\bmod p \text{ が三つの一次式に分解するとき}\\ 0, & f(X)\bmod p \text{ が二次式×一次式と分解するとき}\\ -1, & f(X)\bmod p \text{ が既約のとき}\end{cases}$$

が成り立つ。」⊙

証明

$$\begin{aligned}-pA_p&=\textstyle\sum_{t=0}^{p-1}-a_p(E_t)\\&=\#\{(x, y, t)\in F_p^3\mid y^2\}-p^2\\&=(\textstyle\sum_{x=0}^{p-1}\#\{(y, t)\in F_p^2\mid y^2=f(x)+t^2\})-p^2\\&=(\textstyle\sum_{x=0}^{p-1}\#\{(y, t)\in F_p^2\mid (y-t)(y+t)=f(x)\})-p^2\end{aligned}$$

である。また、任意の F_p の元 a に対して

$$\#\{(y, t)\mid (y-t)(y+t)=a\}=\begin{cases}2p-1, \ if & a=0\\ p-1, \ if & a\neq 0\end{cases}$$

より $-pA_p$ は

$$\begin{cases}3(2p-1)+(p-3)(p-1)-p^2 & f(X)\bmod p \text{ が三つの一次式に分解するとき}\\ 2(2p-1)+(p-2)(p-1)-p^2 & f(X)\bmod p \text{ が二次式×一次式と分解するとき}\\ p\cdot p-p^2 & f(X)\bmod p \text{ が既約のとき}\end{cases}$$

となり題意を得る。q.e.d.

この補題より $f(X)$ が三つの一次式に分解するとき $A_p=-2$ がわかり系 2－1より
$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\le N}-\log(p)\cdot A_p=2$ がわかり証明ができる。

以下、その他の場合についてしめす。
$f(X)=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ とおく。また、α, β, γ をうまく取り替えることによって $\beta, \gamma\notin\mathrm{Q}$ としておく。
また、代数体 $\mathrm{Q}(\beta)$ を K とおく。また、素数 p に対して $c_p=\#\{$体 K 内で p 上にある一次の素イデアル$\}$ とする。

case 1　$\alpha, \beta, \gamma\notin\mathrm{Q}$, $\mathrm{Q}(\alpha, \beta, \gamma)/\mathrm{Q}$ 六次 S_3 拡大のとき。
$f(X)\bmod p$ が重根をもたない p に対して
$c_p=3\Leftrightarrow f(X)\bmod p$ が三つの一次式に分解 $\Leftrightarrow -A_p=2$
$c_p=1\Leftrightarrow f(X)\bmod p$ が二次式×一次式に分解 $\Leftrightarrow -A_p=0$
$c_p=0\Leftrightarrow f(X)\bmod p$ が既約 $\Leftrightarrow -A_p=-1$
より $-A_p=c_p-1$ がわかる。よって、命題 2－2より

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\le N}-\log(p)\cdot A_p\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\{\sum_{p:\text{素数}\le N}\log(p)\cdot c_p-\sum_{p:\text{素数}\le N}\log(p)\}\\&=1-1\\&=0\end{aligned}$$

がわかる。

case 2　$\alpha, \beta, \gamma\notin\mathrm{Q}, \mathrm{Q}(\alpha, \beta, \gamma)/\mathrm{Q}$ 三次巡回拡大のとき。
$f(X)\bmod p$ が重根をもたない p に対して同様に $-A_p=c_p-1$ がいえ題意が証明できる。

case 3　$\alpha\notin\mathrm{Q}, \beta, \gamma\notin\mathrm{Q}, \mathrm{Q}(\alpha, \beta, \gamma)/\mathrm{Q}$ 二次拡大のとき。
$f(X)\bmod p$ が重根をもたない p に対して同様に $-A_p=c_p$ がいえ題意が証明できる。

§6　定理4の証明

補題（Ireand Rosen [5] p.307 Theorem5）「Q上定義された楕円曲線$E:Y^2=X^3-DX$のa_pは$2D$を割らない素数pに対して

$$a_p=\begin{cases}0 & p\equiv 3 \bmod 4\\ \overline{(D/\pi)_4}\pi+(D/\pi)_4\overline{\pi} & p\equiv 1 \bmod 4\end{cases}$$

である。

ただし$p\equiv 1 \bmod 4$のとき$p=\pi\overline{\pi}$, $\pi\equiv 1 \bmod 2+2\sqrt{-1}$とおく。」⊙

とくに、$D=1$のとき

$$a_p=\begin{cases}0 & p\equiv 3 \bmod 4\\ -2b & p\equiv 1 \text{ mpd } 4\end{cases}$$

である。

ただし$p\equiv 1 \bmod 4$のとき$p=a^2+b^2$　a: 偶数、b: 奇数とする。

補題

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\equiv 1 \bmod 4,\le N} 4b^2\cdot\log(p)/p=1 \quad ⊙$$

証明　CM-型の楕円曲線$Y^2=X^3-X$にたいして命題2－1より

$$-1=c_2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\le N} b(p,2)\cdot\log(p)/p$$

がわかる。また$b(p,2)=a_p^2-2p$よりこの式は、

$$=\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\le N} a_p^2\cdot\log(p)/p\right)-2$$

$$=\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\equiv 1 \bmod 4,\le N} a_p^2\cdot\log(p)/p\right)-2$$

となり題意がわかる。q.e.d.

以下、定理4を示す。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\le N} -\log(p)\cdot A_p$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\equiv 1 \bmod 4,\le N} 4b^2\cdot\log(p)/p$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\equiv 1 \bmod 8,\le N} 4\cdot\log(p)$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{p:\text{素数}\equiv 3 \bmod 4,\le N} -2\cdot\log(p)$$

であり、この値は上の補題と系 2－2より
$1+4\cdot 1/4-2\cdot 1/2=1$ となる。
よって、定理4の証明が終わった。

§7　Tate予想

ここでは、Tateの予想と我々の予想との関係について述べる。

Tate予想（cf.[6] p.104 Conjecture2)

「Vを代数体k上定義されたsmoothなsurfaceとする。また、$\zeta_{k,v}(s)$をそのHasse-zeta function とする。このとき、Vの Neron-Severi 群$NS(k)$のk-rankは$\zeta_{k,V}(s)$ の$s=2$での零点の位数に等しい。」

我々が考察しているQ(T)-上定義された楕円曲線はQ上定義された（必ずしもsmoothではない）楕円曲面と思うことができる。一方、代数体k上定義されたsmoothな楕円曲面VについてそのNeron-Severi群のk-rankはそれを$k(T)$上定義された楕円曲線と考えたときの$k(T)$-有理点のrankから簡単に計算できる。よって、上の予想はQ(T)-上定義された楕円曲線がQ上定義されたsmoothな楕円曲面である場合においてそのQ(T)-rankがそのzeta関数の零点の位数によって書かれるという予想となり、この様な場合においては我々以前に既に予想が成されていたことに注意しておく。よって、我々の予想の新しい点は

1．楕円曲線がQ上ではsmoothでない楕円曲面となる場合にも有効。
2．実験が容易である。

という点である。

参考文献

1．T.Shioda, Construction of elliptic curves with high-rank via the invariants of the Weyl groups, J.Math.Soc Japan 43 no 4 1991 673-719pp

2．M.Kuwata, Mordell-Weil groups and elliptic K3-surfaces, Dr.Thesis of Brown University 1989

3．三井孝美　解析的数論　岩波 1989

4．山本芳彦 SATO予想について Master Theses Osaka University 1964

5．K.Ireland and M.Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer GTM 1972

6．J.Tate, Algebraic cycles and poles of zeta functions, Arithmetic Algebraic Geometry, ed. Schilling, Harper and Row (1965) p.93-111.