

任意歯形の解析とNC加工 (第1報)

青森職業能力開発短期大学校 森田永雄・池田正儀

Analysis of Any Tooth Profile and NC Machining

Nagao MORITA, Masanori IKEDA

要約

本報告は歯形曲線としてインボリュート曲線だけでなく、一方の歯車に任意の歯形曲線が与えられたときの相手歯形の解析法を述べる。

筆者は先に(報文誌 第1巻 第1号)包絡線理論による任意歯形の解析法を紹介したが、本報告における解析理論は包絡線理論を開発された堀内義和理博の“接触運動体の概念”による解析理論(接触運動板に関する定理)である。

本報告の目的は ①接触運動板理論による歯形の解析②円を基に表示できる歯形曲線と円を基に表示できない歯形曲線の解析である。また、NCによる実物加工もあわせて報告する。

I. はじめに

最近の機械はメカトロ技術の発達に伴って従来の機械に比べると一層複雑になってきている。中には歯車レスといわれるものもあるようである。しかし、歯車の全く使われていない機械はまれであろう。そこで、機械の構成要素の一つである歯車に視点を当てて、インボリュート歯車以外の歯車の解析と実物製作を試みた。

本報告は任意歯形の曲線として、①直線を歯形とする歯車、②正弦曲線を歯形とする歯車の具体的な解析とNCによって製作した歯車の実物を写真で報告する。

円形歯車の歯形曲線は一つの分け方として、円を基にして表示できるものと、円を基にしては表示出来ないものがある。①は円を基に表示出来る歯形曲線、②は円を基に表示出来ない歯形曲線の例である。

筆者は先の“パソコンによる歯車機構学の解析”(報文誌 第1巻 第1号 掲載)において、包絡線理論によるラックとピニオンのかみあいの解析例を報告したが、本報告における解析理論は包絡線理論を開発された堀内義和理学博士の接触運動体理論で、歯車同志の解析例を報告する。

II. 歯形理論の比較概説

世界で初めて歯形の一般的解法をみだしたのは、元東北大学教授で職業訓練大学校初代校長の成瀬政男博士であった。成瀬博士は歯形理論の世界的パイオニアとなり、以後、博士に啓発された歯車研究者によって歯形の解法理論が数多く誕生した。わが国における歯形の解法理論の主なものを挙げる⁽¹⁾。

- 接線座標の方法 (成瀬政男)
- 極接線座標の方法 (藤井康治、松山多賀一)
- チェザロの自然幾何学的方法 (窪田忠彦、前田和彦、森永覚太郎、大塩 茂)
- トロコイド曲線としての歯形決定法 (窪田雅男)
- 運動学的方法 (渡辺茂)
- 同心円群のトラジェクトリとしての歯形決定法 (堀内義和)
- 歯形の (r, θ) 表示法 (堀内義和)
- 擬似歯形の方法 (堀内義和)
- 接触運動体の方法 (堀内義和)

今回歯形解析に使用した理論と他の理論を簡単に比較してみる⁽²⁾。

①接触点の軌跡の仲介が不要

接線座標では一方の歯形 (C_1) から、接触点の軌跡を経て相手の歯形 (C_2) を求めるが、この方法で

あれば、 C_1 から直接 C_2 を求めることができる。

②媒介変数による直交座標表示

接線座標や、他の多くの理論では相手の歯形曲線が微分方程式で与えられるが、この方法は媒介変数によって与えられるので直接図示できる。

③広範囲の曲線の取扱が可能

この方法では歯形の条件に従わない曲線や、点も扱うことができる。

④角速比に関数関係があっても成り立つ

多くの歯車理論では角速比が一定であるが、この方法は角速比に関数関係があってもよい。

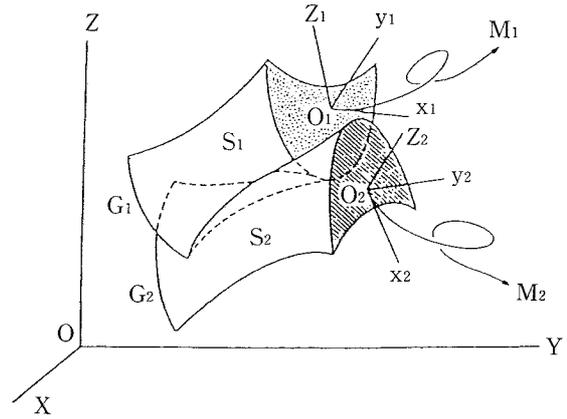


図1 接触運動体理論

III. 接触運動体理論

今日の歯車理論にいたるには、非常に多くの研究者がいた訳であるが、そのうちの代表的な研究者を4~5名アトランダムに記す⁽³⁾。

ラ・イール : 一方の歯車に歯形を与えると相手歯車に対応する歯形が求まることを証明した。

カミュ : 歯車が回転中、任意のかみあい位置における歯形の接点を通る共通法線は中心線上の定点を通る。(カミュの定理)

ライブニッツ : 歯車のかみあい理論は転がり曲線をもとにして研究すべきである。(ローメル、ベルヌーイに宛てた手紙の中で示唆)

オイラー : 曲率中心に関するオイラー・サバリーの定理。インボリュート歯車の研究、(数学者としては記述を要しないであろう。)

成瀬政男 : 世界で初めて組織的、解析的な理論式をみだし(微分方程式による理論式)、“日本の歯車界の父”として世界に紹介された。

さて、ラ・イールによって相手歯形の存在が証明されライブニッツが歯形研究の根本概念を示唆したが、その示唆によって歯形理論を研究した人はいなかった。

昭和の年代に入って堀内義和博士は、ライブニッツの示唆に基づいた概念を拡張し接触運動体理論をみだした。概略は次のようである⁽⁴⁾。(図1)

〈空間において2つの剛体 G_1 , G_2 がそれらの表面 S_1 , S_2 の直接接触によって運動 M_1 , M_2 を行うとき G_1 , G_2 を接触運動体対といい、 S_1 , S_2 を G_1 , G_2 の対に関して互いに共役であるという〉。

接触運動体対は4つの要素 S_1 , S_2 , M_1 , M_2 によって定義される。これら4つの要素のうち3つの要素を適当な初期条件の下に与えると残りの1つが決まる。

IV. 接触運動板理論

1. 図2の説明

接触運動体理論を2次元で展開する⁽⁵⁾。
2つの剛板 G_1 , G_2 が同一平面上で曲線 R_1 , R_2 に沿って転り運動をしている。この状態で剛板 G_1 上に曲線 C_1 を与えると剛板 G_2 上に共役曲線 C_2 が決まる。 C_1 , C_2 はすべり接触運動をする。これが歯車かみあい理論の概念である。円形歯車に例えると R_1 , R_2 がピッチ円、 C_1 , C_2 が歯形曲線となる。

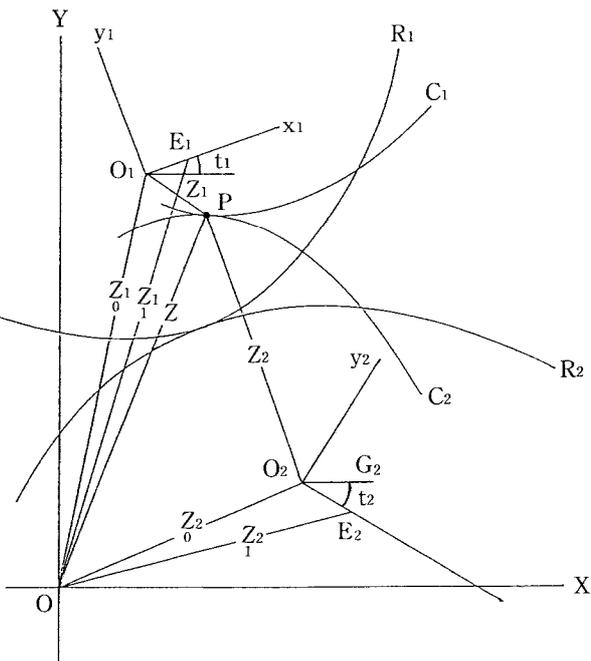


図2 接触運動板理論

2. 曲線表示

歯車のかみあい理論を展開するために図2のように1つの不動座標系と2つの動座標系を設定し、曲線 C_1 は λ をパラメータとして複素数表示で与える。

[R]: 不動座標系 ($O-x, y$)

[R₁]: 動座標系 (O_1-x_1, y_1)

[R₂]: 動座標系 (O_2-x_2, y_2)

Z_i, Z_j = 複素数を表す ($i, j=1, 2$)

$O_i E_i$ = 単位ベクトル ($i=1, 2$)

$$C_1 \text{ in } [R_1]: z_1 = z_1(\lambda) = x_1(\lambda) + iy_1(\lambda)$$

$$C_2 \text{ in } [R_2]: z_2 = \{Z_1 - Z_2 + z_1(Z_1 - Z_2)\} * (Z_2 - Z_1)^{-1}$$

$$J = \left\langle \frac{\partial z_2}{\partial \lambda}, \frac{\partial z_2}{\partial t} \right\rangle = 0$$

図2のP点(歯形のかみあい点)を[R₁]系、[R₂]系の2通りで表し、等置すると上式を得る。

ただし、Jは $\langle \rangle$ 内の複素ベクトルの外積を表し、 $J=0$ は C_2 曲線の存在条件を表す。

V. 六角歯車の解析

図3のように一方の歯車に六角形をした直線歯形を与えたときの相手歯形を、接触運動板理論によって求める。図4の[R₁]系に歯形を与える。

図5における直線を一つの歯形とし、 λ をパラメー

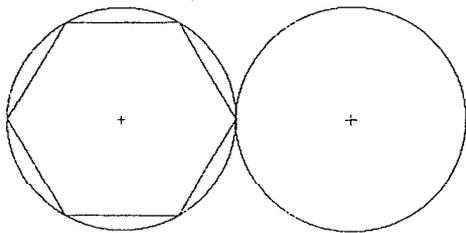


図3 一方に六角歯形を与える

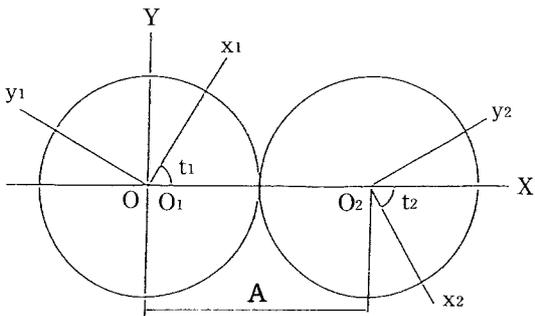


図4 六角歯形の座標系

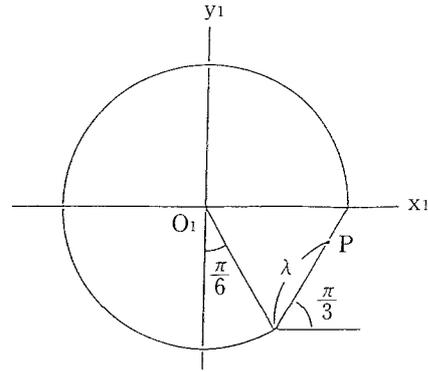


図5 六角歯形の λ 表示

タとして直線を表示する。任意の点Pを[R₁]系における複素ベクトルで表示すると下に示したようになる。上に示した一般式の z_2 と $J=0$ から得られる条件を求めると次のようになる。計算過程は長くなるので結果のみを示す。

$$z_1 = r \sin(\pi/6) + \lambda \cos(\pi/3) + i \{-r \cos(\pi/6) + \lambda \sin(\pi/3)\}$$

$$z_2 = A \exp(-it_2) + \{r \sin(\pi/6) + \lambda \cos(\pi/3)\} * \exp(-i2t_2) - i \{r \cos(\pi/6) - \lambda \sin(\pi/3)\} * \exp(-i2t_2)$$

$$\lambda = r \sin(\pi/6) - A/2 \cos(\pi/3 - t_2)$$

図6はパソコン解析によるピッチ円を含めた歯車対を、図7は歯形のみを示す。

図8はパソコン解析から得られたデータを基にマシンニングセンタで製作した実物写真である。歯車はピッチ円に相当する円板付きの歯車を製作した。

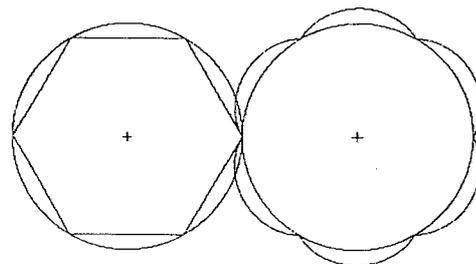


図6 六角歯車対

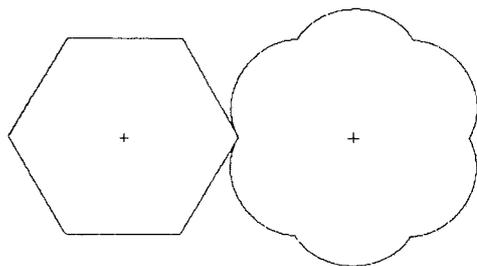
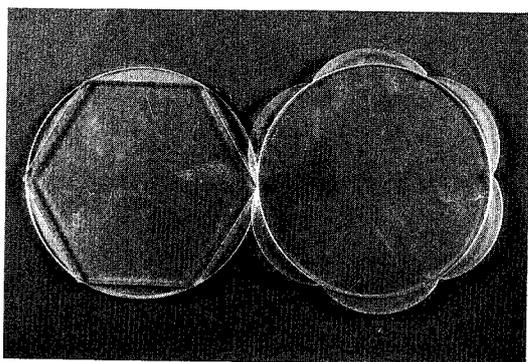


図7 六角歯形と相手歯形



材質：アクリル材

図8 NC 製作による実物写真

VI. 正弦波歯車の解析

1. 正弦波歯車

正弦波は円を基にして表示することは出来ない。そこで正弦波を基にした歯車対を求めるにはラックを仲介とする。歯形曲線が直角座標で表されるラックに正弦波を与え、これとかみあう円形歯車すなわちピニオンを求める。この歯車を正弦波歯車という。こうして求めた二つの歯車は正しくかみあう。

2. 正弦波歯車の解析

図9のように座標系を設定する。[R₁]系をラックと

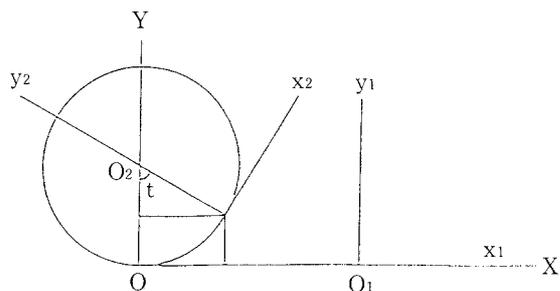


図9 正弦波歯形の座標系

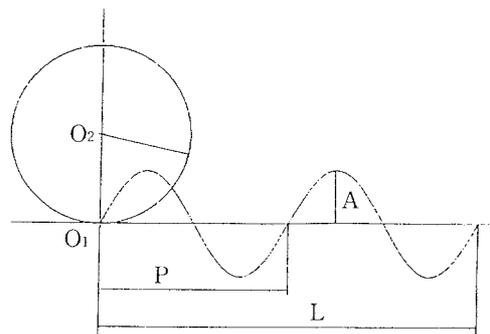


図10 正弦波歯形の諸元

して正弦曲線を与え、これとかみあうピニオンの歯形を[R₂]系で求める。図10にラック、ピニオンの諸元を示す。以下C₁曲線、理論式によって得られたC₂曲線、J=0 から求めた条件式の結果を示す。

$$L = 2\pi r \text{ (ピッチ円周)}$$

$$z = \text{歯数}(2)$$

$$p = \text{ピッチ} (L/z)$$

$$z_1 = \lambda + iA \sin(2\pi\lambda/p)$$

$$z_2 = (rt - r \sin(t) + \lambda) \exp(-it)$$

$$+ i \{ A \sin(2\pi\lambda/p) \}$$

$$- r(1 - \cos(t)) \exp(-it)$$

$$t = - \{ (2\pi A^2/p) \sin(2\pi\lambda/p) \}$$

$$* \cos(2\pi\lambda/p) + \lambda \} / r$$

図11はパソコンで解析したピニオンの2枚歯を、図12は歯車同志のかみあい図を示す。

上記の歯車は歯数(z)が2のものであった。全く同様にして歯数が3のものを解析したのが図13で歯車同志のかみあいを示したのが図14である。

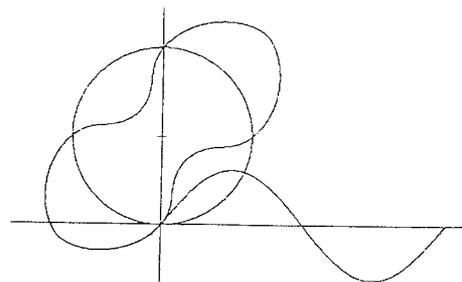


図11 ピニオンの2枚歯

図15と図16に正弦波歯車のNC製作したものの写真を示す。

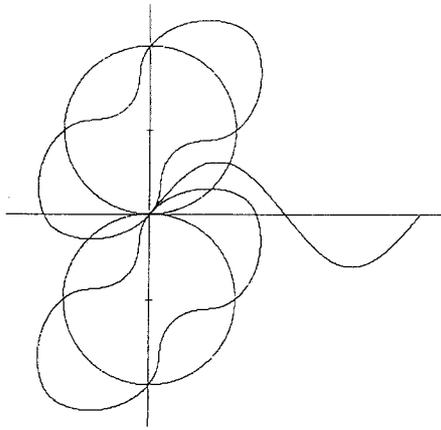


図12 正弦波歯車対のかみあい（2枚歯）

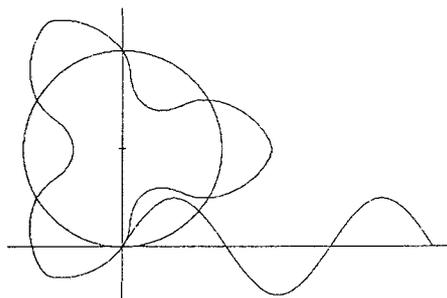


図13 ピニオンの3枚歯

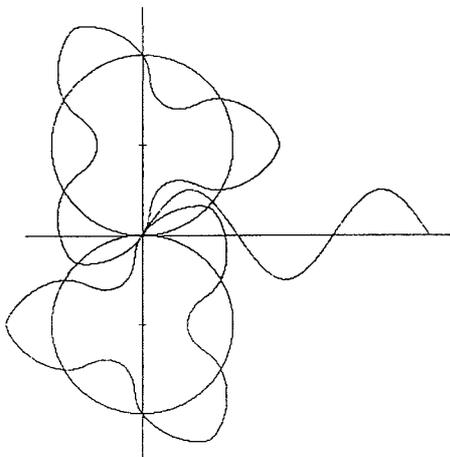
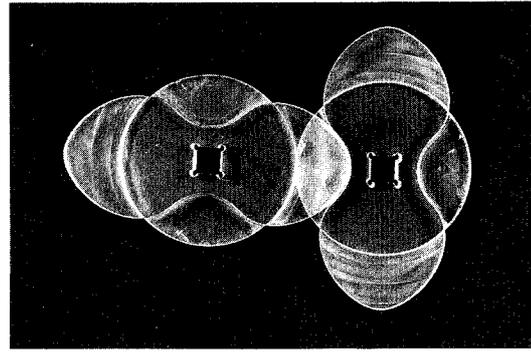
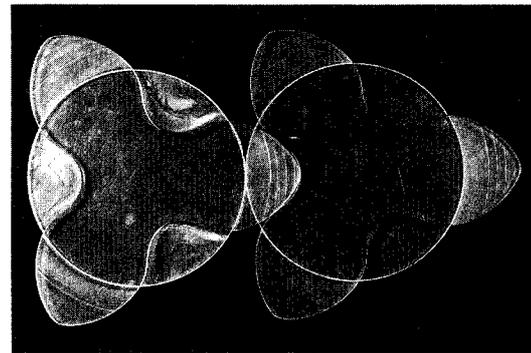


図14 正弦波歯車対のかみあい（3枚歯）



材質：アクリル材

図15 NC製作による実物写真



材質：アクリル材

図16 NC製作による実物写真

VII. 結果および考察

接触運動板理論によって一方に任意の歯形曲線が与えられたとき、接触点の軌跡の仲介なしに相手歯形を解析的に求めることができた。本報告では1～2の例を示したに過ぎないが、所期の目的は達せられた。

本報告における歯車の例は実用的な歯車ではないかもしれない。しかし、非実用的な歯車でも理論的に成り立つ歯車を作ることによってより優れた歯車を開発することができる。

今後は本理論を縦横に駆使して、実用的な優れた歯車を開発することが残された課題である。

以下に加工と歯車に関する結果と考察を挙げる。

- ①パソコンによる解析で、NC加工用の数値を算出した。
- ②NC加工用のテープは自動プログラム装置で作成した。
- ③加工精度はNC機の精度によった。
- ④歯車の運動性能や有用性は考えずに、機構学的にかみあう歯車を製作した。

参考文献

歯車工学の小径をたずねて (堀内義和 著)

沖電気工業株式会社 出版 昭和49年

(1) P36~P37

(2) P78

(3) P17~P20

(4) P21~P22

(5) P21~P22