〈研究ノート〉

陰関数曲線の概形表示法

青森職業能力開発短期大学校　森　田　永　雄

A Method of Curve-Tracing of Implicit Function

Nagao MORITA

要約　関数の追跡はパソコンが著しく発達下現在でもかなり難しい問題である。

そこで筆者は、理論的追跡ではなく、陰関数曲線の概形をパラメータ表示や座標変換、導関数の利用といった従来の方法を全く用いず、円を導入して曲線と円の交点として曲線上の点を求めるというパソコン利用の方法を試みた。

本報告では、任意の形で与えられた関数の概形が、従来の方法では非常に困難か、計算が大変面倒と思われるような形のものでも、曲線が連続でありさえすれば簡単に表示できることがわかったので報告する。

Ⅰ．はじめに

理工学の分野では色々な形の関数が取り扱われている。それらの関数の中には概略図が容易には得られないものがある。特に、関数が陰関数で表示されているとき、その関数の概形を把握することが容易でない場合が多い。この様な場合、パソコン等を用いてその関数値を求め、概形を表示させる方法が多く用いられている。

本報告では、関数の概形を表示する比較的簡単な方法を紹介する。この方法を用いる事により、陰関数として関数が与えられている場合でも容易に概形を把握する事ができる。

Ⅱ．補助円利用の概形表示法

ここで、与えられる関は連続であると仮定し、その関数を F(x,y)=0 と表す。

著者（我々）が提案する方法は、以下の様な手順で関数の概形を求める。与えられた関数上に中心を持つ円（以下これを補助円と呼ぶ）を考える。この補助円の半径は、円周と関数が交点を持つ様に適当に決める。この様に定めた補助円と関数の交点が次に定める補助円の中心となる。この手順を順次繰り返すことにより、我々は与えられた関数の概形を求めることができる。この補助円の半径を小さく取れば、詳細な概形を得る事ができる。上述した補助円を用いることにより、多価関数であっても、あたかも１価関数であるように扱うことができる。

補助円を用いた概形表示法を図１によって説明する。図１において、関数 F(x,y)=0 上の点 P_1 を初期位置と呼ぶ。この P_1 の座標を（x_1,y_1）とする。この初期位置として、例えば、（原点）、（x 切片）、（y 切片）または（x =1のときの y の値）のように容易に求めることができる座標を設定する。P_1 を中心とし、関数 F(x,y)=0 と交わる様な適当な半径を持つ補助円（K_1 で表す）を与えこの交点を P_2 とする。さらに、P_1、P_2 を直線で結んだとき、x 軸とのなす角を θ_1 とする。交点 P_2 の座標は以下の連立方程式の解として求まる。

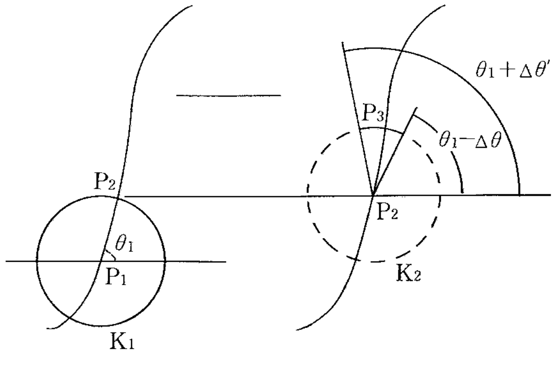

図１　補助円利用の概形表示法

論文受付日　1992.7.13

$F(x,y)=0$ ①

$x_2=r*\cos(\theta_1)+x_1$ ②

$y_2=r*\sin(\theta_1)+y_1$ ③

ただし、rは補助円(K_1)の半径を、x_1,y_1は関数上の点で、補助円(K_1)の中心座標を、θ_1は直線P_1、P_2がx軸とのなす角を各々表す。このようにして求めたP_2を中心とした適当な半径を持つ補助円(K_2)を与える。この補助円(K_2)と関数の交点をP_3とする。この交点P_3は先に求めたθ_1を基に、変量$\Delta\theta$、$\Delta\theta'$を与え、直線P_2、P_3とx軸とのなす角が$\theta_1-\Delta\theta$と$\theta_1+\Delta\theta'$の間になるようにする。この操作を繰り返し、与えられた関数の概形をその関数と補助円との交点として求めることができる。

我々の方法において問題になるのは、各時点に対する補助円の半径r、補助円(K_1)におけるθ_1、補助円(K_2)における$\Delta\theta$、$\Delta\theta'$の取り方である。図1からも明かなように、補助円と曲線は一般に2点以上の交点を持つ。これらの交点の中から次の補助円の中心点となる点を選び出す必要がある。現在、試行錯誤によって関数の概形を求めている。我々の方法によって、具体的に求めた関数の概形を次節IIIに挙げる。

III. 応用例

ここで我々が取り扱う関数例は、その概形表示が面倒な関数である。実際、我々の方法を用いたときでもr、$\Delta\theta$、$\Delta\theta'$の設定には試行錯誤が必要であった。

関数例1：関数　$x^3-y^3-3x^2y+x^2-2=0$

結果を図2に示す。

初期位置として$(0,(-2)^{1/3})$,(1,0)、が考えられる。この図2においては初期位置として$(0,(-2)^{1/3})$を用いた。初めにxの増加する方向に概形を表示する。次に同じ初期位置からxの減少する方向に表示する。この関数で、xにある値を代入したときのyの方程式を求めると、yの実数解が1つしか存在しない。したがって開曲線であることがわかる。また、漸近線が存在してその方程式は次のようである。

$y=.322x+.302$

この関数は陽関数表示も、極座標表示もできない。

関数例2：関数　$x(e^x+e^{-x})\sin(y)$
$-y(e^x-e^{-x})\cos(y)=0$

DFBレーザの固有方程式に現れる関数[1]。通常の共振器の代わりに利得もしくは屈折率の周期的凹凸を利用して分布帰還作用を持たせるタイプのDFBレーザ(Distributed Feed Back Laser)において、その発振のしきい値とスペクトル構造を決定する。

初期位置は(0,0)、$(0,2n\pi\pm\pi/2)$
$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 等の他に与式を変形すると

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\ x\tan(y)$$

となるからyは無限個の値を持つ。初期位置は図3の場合(-2,-4.259)、(-2,4.259)などである。x軸に対称に無数の曲線が現れる。原点も関数を満たす。追跡の計算例を示す。

初期位置としてP_1(-2.-4.259)を設定しP_2(-1.8,-4.296)を求めておく。

θ_1は次の様にして求まる。

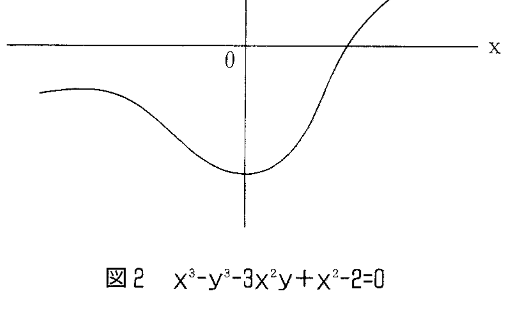

図2　$x^3-y^3-3x^2y+x^2-2=0$

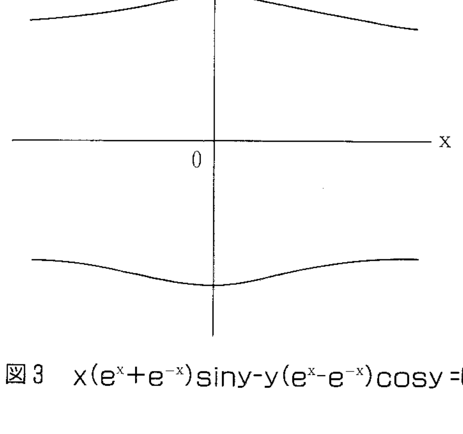

図3　$x(e^x+e^{-x})\sin y-y(e^x-e^{-x})\cos y=0$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{-4.296-(-4.259)}{-1.8-(-2)}$$

$$=-.183$$

座標変換できない関数

関数例３：関数　$-1.4x+2.4\tan^{-1}(x)$
$-1.4y+4.8\tan^{-1}(y/2)$
$-.95=0$

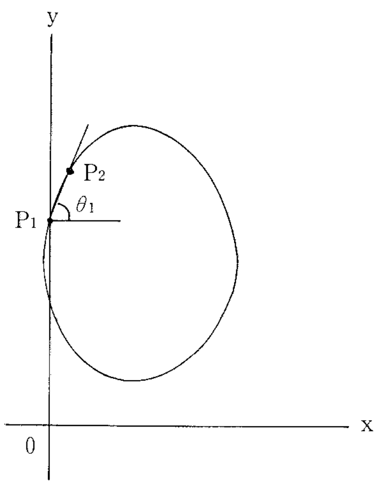

図４　$-1.4x+2.4\tan^{-1}x-1.4y+4.8\tan^{-1}\frac{y}{2}-0.95=0$

歯車対(外接)成立条件の判別式に現れる関数[2]。係数は色々な値をとる。ここに示したのは一例である。図４の閉曲線内の x,y の値によってかみあう外接歯車対の大きさ､歯数その他すべての諸元が決定される。初期位置は x =0として(0,1.302),(0,2.093)などが求まる。図４では P_1 として(0,2.093)を設定し､θ_1 を計算するために P_2(0.1,2.39)を求めた。P_1、P_2から θ_1 を求めると

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2.39-2.09}{0.1} =1.25$$

となり、容易に追跡できる。

Ⅳ．考察

我々が提案した方法に関して、その特徴を以下に列挙する。

①曲線が連続であるならば、初期位置を与えることにより、その概形を得ることができる。

②関数のより詳細な概形を得るためには各種のパラメータの設定に試行錯誤が必要になる。

孤立点をもつような関数は、我々の方法でも表示させ難い。

Ⅴ．むすび

以上の　Ⅲの応用例で述べたように、我々が提案した補助円を用いた関数の概形表示法は関数の固有の性質に左右されず、単純な操作のみで関数の概形が求まるものである。関数によっては、各パラメータ等の細かな設定に試行錯誤が必要な場合もあるが、関数の概形表示法としては十分活用できる方法である。

参考文献

(1)　H. Kogelnik and C. V.: "Coupled-Wave Thery of Distributed Feed Bcak Lasers", J. Appl Phys., vol. 43, p. 2327 (1972)

(2)　堀内義和：一般インボリュート歯車の設計法（機械の研究　昭和44年）

(3)　片桐　重延　他　３名著　初歩からの数値計算　東京電機大学出版局

(4)　岩切　晴二　著　微分積分学精説　培風館