―― 報　文 ――

パソコンによる歯車機構学の解析

青森職業訓練短期大学校　森　田　永　雄

Analysis of Gear Mechanism by Personal Computer

Nagao Morita

要　約　歯車の機構学的研究は多く学者によってなされ、今では過去のものになったかにみえる。しかし任意に与えられた歯形にかみあう相手歯形を求める方法は殆ど知られていないのが現状である。

本報告では、一方の歯形曲線が任意に与えられたとき、それとかみあう相手歯形の曲線が極めて簡単に解析することが出来、しかも座標上に描くことが出来る理論式の紹介と解説、さらにパソコンを利用したラックと小歯車についての具体的な歯形の解析を紹介する。また、パソコンからワイヤ放電加工に必要なデータを算出し、それを基に製作したラックと小歯車を写真で紹介する。

本文の内容を要約すると次のとおりである。

(1)歯車研究の歴史的概説

(2)本報告の基本となる"疑似歯形理論"の紹介と式の解説、理論式の特長

(3)パソコンを使った理論式の数学からの応用例、疑似歯形理論のパソコンへの応用解説、歯形解析の具体例

(4)ワイヤ放電加工による歯形切削

(5)疑似歯形理論の他への応用

(6)参考文献

I　はじめに

"機械"のあるところに歯車あり"と言われるほど、歯車は機械の生命であり、動力や運動を伝える最も重要な機械要素の一つである。

Gear の語源が Machine の語源と同じであるということである。[2]しかし、これほど古くから人類と関わりを持ってきた歯車でも、理論的な手法で解析し設計することは容易ではない。普通のインボリュート歯車でさえ、歯車対を成立させるための条件[2]が任意に与えられたときの解析は困難である。

本報告では、歯形曲線が任意に与えられたときの解析理論とパソコンを利用した解析、それらを基にして得たデータで歯車の実物をワイヤカットしたものを紹介する。

解析に用いた理論式は、堀内義和理博の"疑似歯形理論"[1]（包絡線理論）である。

II　歯形論概説

1．歯形理論史

歯形理論の研究は古くから多くの学者によって行なわれてきた。ちなみに、中世に遡ってみれば、彼の有名な大天才レオナルド・ダビンチ、近世に至ってはライプニッツ、オイラー、"歯形の機構学的条件"の定理で有名なカミュ[2]など、なじみの名前を挙げることができるが、他にも多くの研究者がいる。

歯形を解析的に出すことは世界中の学者が考えていたことであるが、そうした機運にもかかわらず、近世以来、200数十年もの間一般論は現われなかった。

2．我国の歯形理論

昭和に入って世界で初めて組織的、解析的な理論式をあみだしたのは、元東北大学教授で職業訓練大学校初代校長の成瀬政男博士であった。後に日本の歯車界の父[2]として諸外国の学者に紹介された成瀬博士は、歯形理論の世界的パイオニアである。以後、歯形の解法理論が続々と誕生することになる。歯形の解法理論の主なもの[2]を列挙すると下記のようである。

○接線座標の方法

○極接線座標の方法

○チェザロの自然幾何学的方法

○トロコイド曲線としての歯形決定法
○運動学的方法
○同心円群のトラジェクトリとしての歯形決定法
○歯形の（ｒ、θ）表示法
○疑似歯形の方法
○接触運動体の方法

Ⅲ　疑似歯形論概説

1．理論式紹介

初めに名称について説明しておく。

“疑似”の真意は、普通歯車はもちろん、より一般の不定速比歯車やカム、摩擦車などを含む広範囲の車[2]という意味である。

今回パソコン解析に用いた疑似歯形理論は別名“包絡線法”とも言い、名称の意味している通り、歯車もカムも同一の理論式で解析することが出来る。すなわち、従来から歯車は微分方程式による解析が主な手段で、カムは近似画法が解析手段にとられていたが、両者とも包絡線理論で解析することが出来る。

微分方程式による解析も、近似画法による解析も、パソコンを利用しての解析は極めて困難である。後述するが、包絡線法はパソコン解析が可能であり図示できる。従って今後は、

歯車：微分方程式から包絡線法へ

カム：近似画法から包絡線法へ

という解析手段をとる。

2．理論式概説

包絡線理論の歯車への応用を考えてみる。運動をしている歯形曲線を、高速度カメラで断続的に撮影すると曲線群が得られるが、相手歯形の曲線は、運動している全ての曲線に接するものでなければならない。すなわち、それが包絡線である。以下、式によって説明する。

φをパラメータとして、x、y を次のように表わす。

$$\begin{cases} x = x(\varphi) \\ y = y(\varphi) \end{cases}$$

上式を連続関数と仮定すると、一つの曲線を表す。次に、φ、t をパラメータとして x、y を次のように表わす。

$$\begin{cases} x = f(\varphi,\ t) \\ y = g(\varphi,\ t) \end{cases}$$

上式は φによって一つの曲線が描かれ、t によって曲線群が描かれる。すなわち、φによる曲線を歯形曲線に定め、t は歯車の運動を表わすように定めるのである。以上の考え方で包絡線法の理論を展開する。

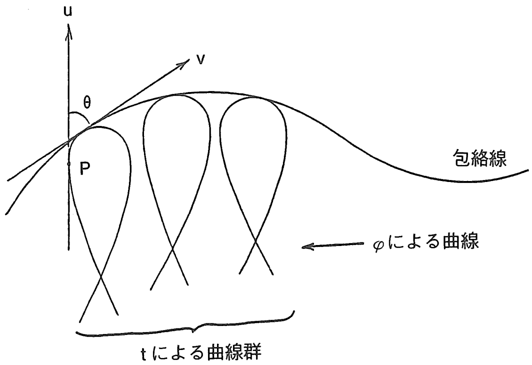


図１　J=0 の説明

(1)　基　礎　式　（歯　形　曲　線）

$$\begin{cases} x = f(\varphi,\ t) \\ y = g(\varphi,\ t) \end{cases}$$

φ：曲線を表すパラメータ

t：運動を表すパラメータ

この式によって（歯形）曲線群が得られる。図１参照。基礎式によって得られる曲線上の一点Ｐにおける接線ベクトルは

$$u = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi},\ \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)$$

である。また、t が描く曲線群によって、一つの曲線（仮想の包絡線で、一般的には一つとは限らない）を描く。その曲線上の接線ベクトルは

$$v = \left(\frac{\partial f}{\partial t},\ \frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

である。よって、包絡線が存在するためには、$\theta = 0$、すなわち u、v の外積が 0 でなければならない。外積の成分表示をすると、

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$$

上式を J とおくと、J はまた φ、t の関数で、$J \equiv J(\varphi,\ t) = 0$ となり、これは陰関数表示である。ここで、陰関数定理により $J_\varphi \neq 0$ なら $\varphi = \varphi(t)$ と φ を t で表すことが出来、この φ を基礎式に代入すれば一変数の包絡線を表す式を得る。陰関数定理は微分学の本を参照のこと。以上をまとめると

(2)　包絡線の存在条件

（イ）接線ベクトルの条件

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial g}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

(ロ)陰関数定理の条件

$J_\varphi \neq 0$　　($J_t \neq 0$でも同じ)

3．疑似歯形理論の特長[2]

①角速比に任意の関数関係があってもよい。

普通の歯車論では、角速比一定の場合のみ扱うが、この方法では、角速比が関数関係にあっても成り立つ。

②かみあい線の仲介が不要

接線座標や、極接線座標では、一方の歯形（R_1）からかみあい方程式を経て相手の歯形（R_2）を求めなければならないが、この方法であれば、R_1 から直接 R_2 を求めることが出来る。

③媒介変数による直交座標表示が可能

接線座標や、極接線座標では、歯形曲線が微分方程式で与えられるため、曲線を直接図面に描くことが出来ないが、この方法は図示が可能である。（パソコンを利用しての解析には最適）

④広範囲の曲線の取扱いが可能

従来の歯形論において扱う曲線は、そのほとんどが歯形の条件に従うもののみを取扱ったが、この方法によれば、普通の歯形が最も簡単な場合として導けるし、歯形の条件に従わない曲線や点さえも、研究の対象とし得る。

Ⅳ　パソコンによる歯形解析の２～３の例

１．数学からの解析例

包絡線理論を具体的に応用して、視覚的に理解出来るように、次のようなことを行ってみた。

放物線の頂点を、正弦曲線に沿って移動させた曲線群とその包絡線を理論式から求め、パソコンに描かせたものである。

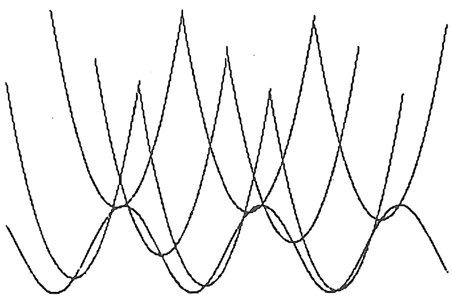
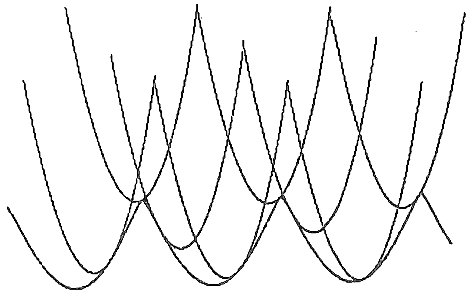


図２　正弦曲線に沿って移動させた放物線



$$x=\frac{A}{2}\cos t + t$$

$$y=\left(\frac{A}{2}\cos t\right)^2 + A\sin t$$

図３　放物線群の包絡線

(1)基礎式

$$\begin{cases} x=\varphi+t \\ y=\varphi^2+A\sin t \end{cases}$$

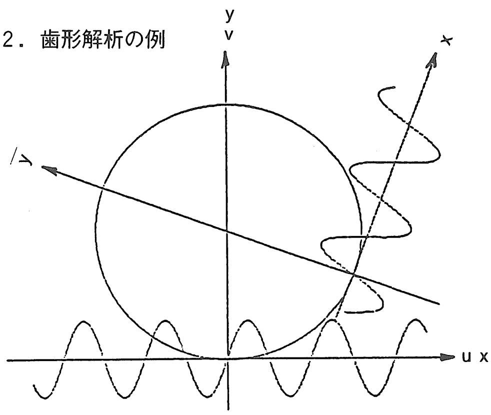
(2)　ヤコビアン　J

$$J=2\varphi-A\cos t=0$$

$$\therefore \varphi=\frac{A}{2}\cos t$$

この φ を基礎式に代入して、包絡線の式を得る。

２．歯形解析の例



ラック上の曲線群の式　　$u=f(\varphi, t)$　　$v=g(\varphi, t)$

小歯車上へ写像した式　　$x=u\cos\varphi - v\sin\varphi + R\cos\varphi$

$y=u\sin\varphi + v\cos\varphi + R(1-\cos\varphi)$

図４　ラックから小歯車への写像

歯形解析のための包絡線理論をパソコンへ応用する場合は、曲線群を与える基礎式から単純にヤコビアンを求めてパソコンに描かせても、相手歯形の曲線は得られない。図４のように一つの不動座標系と二つの動座標系を設定する。x－y は不動座標系、u－v はラックの動座標系、$\overline{x}-\overline{y}$は小歯車の動座標系とする。

ここでは、ラックに与えた歯形曲線とかみあう小歯車の歯形曲線を求める場合を取り上げることにする。

ラックの動座標系に与えた曲線が、小歯車の動座標系へは、曲線群として写像され、その包絡線を不動座標系

に求め、パソコン表示するものである。図4に示してあるように、これは、座標軸変換の式と同じ型の変換式になることが分る。

3．ラックに正弦曲線を与えたときの例

ラックの歯形に正弦曲線を与えたとき、これとかみあう小歯車の歯形を理論式から求め、パソコン表示させたものを示す。

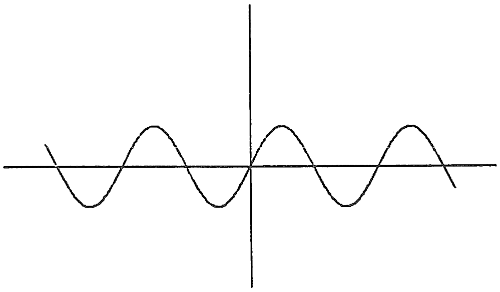


図5　ラックの歯形の正弦曲線

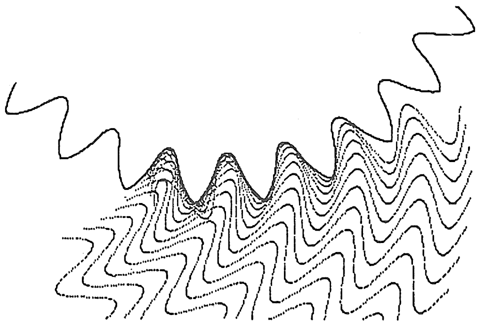


図6　小歯車上での正弦曲線の包絡線

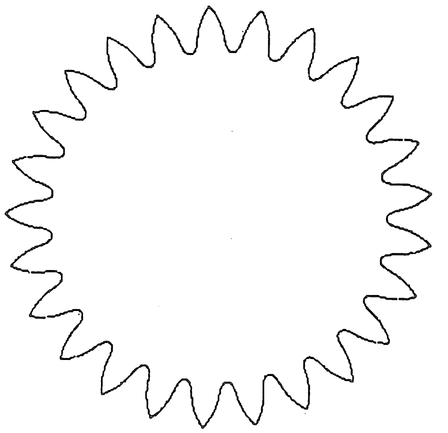


図7　ラックの正弦曲線とかみあう小歯車

ラックと共に移動する正弦曲線の式

$u=f(\varphi, t)=t+R(k-\varphi)$

$v=g(\varphi, t)=A\cdot\sin t$

小歯車上への変換式

$x=u\cos\varphi-v\sin\varphi+R\sin\varphi$

$y=u\sin\varphi+v\cos\varphi+R(1-\cos\varphi)$

ここで、

φ、t＝媒介変数

R＝ピッチ円半径

A、k＝ある定数

変換式からヤコビアンJを作り、J＝0とおく。

$J=u\,u_t+v\,v_t-u_\varphi v_t-Rv_t=0$

$J_\varphi\neq 0$であるので

$$\varphi=\frac{A^2\sin t\cos t+Rk+t}{R}$$

この φ を変換式に代入すれば、小歯車の歯形を与える式が得られる。図5～図7は、それぞれラックと小歯車上の曲線とパソコン表示した解析曲線図である。

4．ラックに直線歯形を与えたときの例

直線歯形は一つの歯形に四つの直線式が必要となり、表示式が煩雑になるので、パソコン表示した図のみを示す。

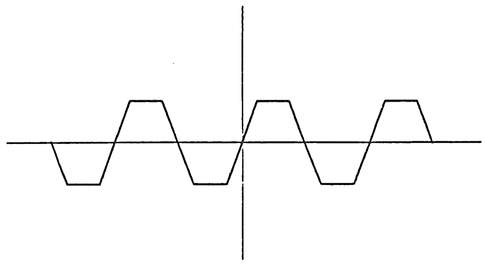


図8　ラックの歯形に与えた直線歯形

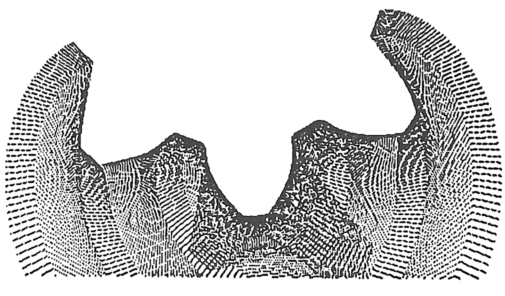


図9　小歯車上での直線歯形の包線線の形成
（インボリュートとなる）

V　ワイヤカットによる歯形製作

今回は、正弦曲線を歯形に持つラックと、それとかみあう小歯車をワイヤカットで製作してみた。

ラック、小歯車の具体的な式は下記の通りで、この式からワイヤカットに必要なデータを算出した。

ラック上の正弦曲線の式

$u=t+25\ (k-\varphi)$

$v=3\ \sin t$

小歯車上への変換式

$x=u\cos\varphi-v\sin\varphi+25\ \sin\varphi$

$y=u\sin\varphi+v\cos\varphi+25\ (1-\cos\varphi)$

今回は初めての試みであったので、歯車の持つ諸元は考慮せず、単純に一方の歯形から相手の歯形を求めるだけに止めた。

ワイヤカットしたラック、小歯車は写真の通りである。

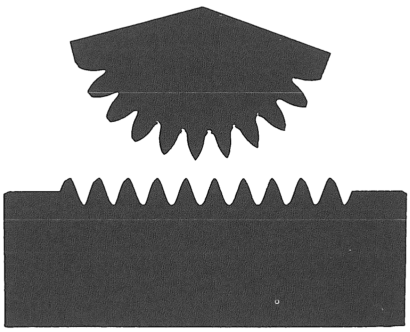


図10　ワイヤカットしたラックと小歯車

Ⅵ　結　果

上に示した歯形解析の例は、歯車設計としては決定すべき多くの諸元が残されているが、少くとも機構学的にかみあう歯形は決定され、所期の目的は達せられた訳である。

１～２の例しか示すことが出来なかったが、疑似歯形理論によって、かみあう相手歯形が解析的に、しかも座標上の図形として求められることは画期的なことである。

この方法によれば、歯形解析は勿論、他の機構解析に応用されうることは想像に難くないであろう。

Ⅶ　考　察

以上のように、疑似歯形理論は、理論式が分り、パソコンさえ使えれば容易に歯形解析が出来るが、これで歯車のことが分ったとは決していえない。

歯形解析は最も重要で基本的なことであるが、歯車を研究する者にとっては、学ぶべき非常に多くのことが残されている。今後も、この理論の理解を深め、様々な歯形の研究と共に、実用歯車の設計を試みながら、理論の他の方面への応用を考えてゆくつもりである。

Ⅷ　謝　辞

今回の報告に当り、平素から多岐にわたって御指導下った、疑似歯形理論の生みの親であり、私の恩師でもある元宇都宮大学教授の堀内義和理博に心から感謝の意を表する次第です。

Ⅸ　参考文献

(1)　堀内義和：疑似歯形の方法による歯形の解法について、(第１～３報) 機論集　10～39 昭和19

(2)　堀内義和：歯車工学の小径をたずねて