

# 集中素子の付加する弦振動の 回路網類推による解析

川内職業訓練短期大学校 電子・情報システム系 原 園 正 博

Analysis of a string vibration involving concentrated  
element by means of electrical network analogy

Masahiro Harazono

**要 約** 音響工学や振動工学などの線形系の振動問題に対して、電気回路網による類推は、極めて重宝である。特に、電気音響変換器などでは、各系が集中定数的に存在し、問題の一元化の意味では不可欠な手法である。また、機械系の典型的な一次元分布定数系である弦の振動問題に対して、電気振動の伝搬の問題を対象にした伝送線理論による類推が可能である。著者らは、電気音響変換における一つの問題として、電磁型変換器の負スティフネスが弦振動に与える影響について検討してきた。この問題は分布定数系に集中定数が付加する例として興味深い。特に負スティフネスの付加は電磁型変換器を用いる以上避けられない問題であるにもかかわらず、なおざりにされている感がある。この解析解は、直流偏倚磁束の吸引力を線形化して、また $\delta$ 関数を用いることにより定式化し、さらにLaplace変換を用いることにより得ることができる。結果として、各部分音の振幅にはほとんど影響は見られないが、周波数間に非調和性が発生し、しいては唸が発生する。即ち、振動特性は振動周波数を求めることにより検討できるのであるが、その解析過程や結果は極めて複雑となる。そこで、回路網理論による類推を適用し、弦振動に集中負スティフネス、分散的な負スティフネス、集中質量が存在する場合等の等価回路を示すと共に、その駆動点インピーダンスを与え、それより振動周波数が求められることを記述している。

## I 緒 言

音響工学や振動工学における主に線形集中定数系の問題において、古くから電気回路網による類推が大きく貢献している。即ち、回路網の解析に培われた考え方がそのまま応用できることから、複雑な振動系の問題を比較的容易に解くことができるなどの特徴を有している。もちろん、この考え方は普遍的なものであり、特に集中定数系に限る必要はなく、分布定数の機械振動系においても回路網理論が活用されるようになってきている。<sup>(1),(2)</sup>

伝送線路における電気振動の伝搬の問題は回路網学の発達の起源をなすものであるが、機械振動系においてこれと類似した典型的な一次元分布定数系として弦の振動を考えることができる。即ち、両者共に一次元の波動方程式として与えられることから、弦の振動が伝送線路からの類推として考慮できることが推測される。中村<sup>(3)</sup>は、打弦の機構をモデル表示すると共に、アナログ回路を構

築して打弦の問題を扱っている。また、等価回路を基に、デジタルシミュレーションを行い、ピアノ音の特性について論じている。<sup>(4)</sup>

弦の振動については、曲げ剛性を考慮すると部分音間に非調和性が発生することが知られているが、ピアノなどではこの非調和性は自然楽器の特徴を示し、暖かみを与える要素であると言われている。<sup>(5)</sup> また、非調和性が発生すると弦の振動には唸が発生することも詳しく論じられている。<sup>(6)</sup> ところで、弦の振動を電気信号に変換するには、電磁型変換器が良く用いられるが<sup>(7)</sup>、著者等<sup>(8),(9)</sup>は変換器の負スティフネスにより非調和性が発生することを論じてきた。また、結果として変換器の電気信号にも唸が生じるなどの影響が生じることも明らかにした。<sup>(10),(11)</sup> これらの振動解はLaplace変換を用いて得られるが、その過程は必ずしも容易なものではなく、また物理的な意味も明確とはいえない。

そこで、本論文では弦の近傍に集中的、及び離散的な

負スティフネスが存在する場合を対象にして、回路網理論のインピーダンス類推を試みている。結果的には、負スティフネスが弦に作用する場合、振動周波数とその作用点に応じて低次部分ほど低下し、従って非調和性が発生すると共に、結果として顕著な唸が発生する。しかしながら、振幅にはほとんど影響を与えないことから、負スティフネスの影響は振動周波数を解析することにより解明される。そこで、回路網類推を基に特性方程式を考慮して等価回路を表わし、その駆動点インピーダンスを検討することにより振動特性を検討する方法について詳細に記述している。

II 弦振動の回路網類推

Fig.1 に示すように、単位長の等価抵抗  $R$ 、インダクタンス  $L$ 、コンダクタンス  $G$ 、キャパシタンス  $C$  を有する伝送線路の基礎方程式は電信方程式として良く知られているように、電圧を  $e$ 、電流を  $i$  として次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial e}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Ge + C \frac{\partial e}{\partial t} \end{aligned} \right\} (1)$$

両者を  $x, t$  で微分して整理すると次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + (CR + LG) \frac{\partial e}{\partial t} + RG e \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + RG i \end{aligned} \right\} (2)$$

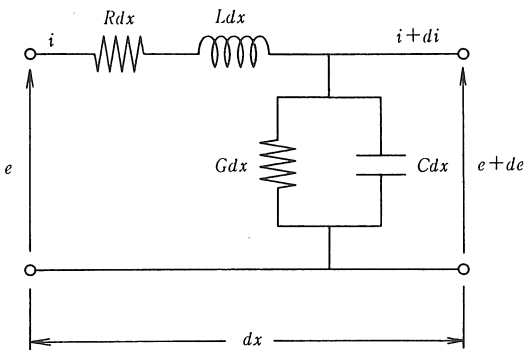


Fig. 1 Model of distributed constant circuit.

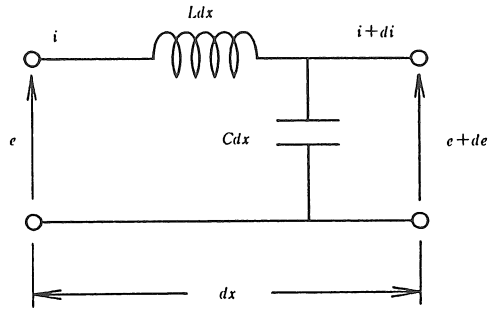


Fig. 2 Non-loss transmission line.

今、損失の無い弦の振動との類推を試みる意味で、 $R=G=0$  とおくと、次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

即ち、電圧  $e$ 、電流  $i$  の両者とも同一の形式で与えられ、このときの回路は Fig.2 のように示される。

一方、線密度  $\sigma$ 、張力  $T$  の曲げ剛性の無視できる一様な弦の振動方程式は、弦の変位を  $y(x, t)$  として次のように与えられる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

あるいは、弦の振動速度を  $v = \partial y / \partial t$  とおき、両辺を  $t$  で微分すると、上式は次のように考えることができる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{T} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5)$$

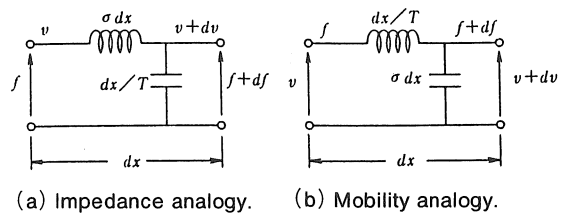


Fig. 3 Mechanical circuit of a string.

さらに、張力の垂直成分を  $f = -T\partial y/\partial x$  とおくと、次のようにも記すことができる。

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma \frac{\partial v}{\partial t} \tag{6}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{T} \frac{\partial f}{\partial t}$$

これらの結果より、(5)式は(3)式に対応し、(6)式は(1)式において  $R=G=0$  とおいたものに対応していることが分かる。従って、力と電圧、速度と電流とを対応させたいいわゆるインピーダンス類推では  $\sigma$  は  $L$  に、 $T$  は  $1/C$  に対応し、弦の等価回路として Fig.3 が描かれる。また、(6)式と  $R=G=0$  とおいた(1)式のそれぞれの(2)式の対応を逆にして考えるならば、モービリティ類推では  $\sigma$  は  $C$  に、 $T$  は  $1/L$  に対応することが容易に推察される。

なお、境界条件として、弦の固定端については  $v=0$  と考えられ、従って、インピーダンス類推では  $i=0$  に対応して伝送線路では終端開放と考えることができる。また、モービリティ類推では、 $e=0$  に対応し、終端短絡と考えられる。

### III 集中負スティフネスの存在する弦の振動特性

以上の類推結果を基に、Fig.4 に示す弦の振動系を考察する。弦の振動を電気信号に変換する場合には電磁型変換器が良く用いられるが、電磁型変換器には直流偏倚磁束が存在し、従って弦に吸引力を及ぼす。この吸引力は、線形化して扱くと、静的成分  $F_0$  と負スティフネス成分  $s_n \cdot (y)_{x=a}$  に分けて考慮することができ、この吸引力が  $x=a$  に集中的に作用するときの振動方程式は次のように考慮することができる。<sup>(8)</sup>

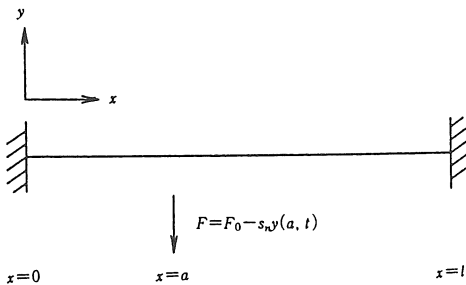


Fig. 4 String vibration system affected by negative stiffness.

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \delta(x-a) \{F_0 - s_n (y)_{x=a}\} \tag{7}$$

ここで  $\delta$  はディラックのデルタ関数である。

この振動方程式の厳密解は Laplace 変換を用いて得ることができるが、最終解を得るためにはきわめて複雑な解析過程を踏まねばならない。そこで、解析結果の要点のみを述べるものとするが、まず特性方程式が次式で与えられるということが解析過程における最も重要な結果として得られる。

$$H(\omega) = c \sigma \sin \frac{\omega}{c} l - \frac{s_n}{\omega} \sin \frac{\omega}{c} a \sin \frac{\omega}{c} (l-a) \tag{8}$$

そして、振動周波数は  $H(\omega)=0$  により与えられ、負スティフネスの作用点に応じて低次部分音ほど低下するが、作用点がノードポイントと一致する部分音は何ら影響を受けないことが知れる。

非調和性を評価する尺度として、基本音  $f_1$  に対する  $n$  次部分音周波数  $f_n$  の倍音周波数からのずれをセント値で表わした、次式の Inharmonicity と称される値が用いられている。<sup>(5)</sup>

$$\delta_n = 1200 \log_2 (f_n / n f_1) \quad (\text{cent}) \tag{9}$$

例えば線密度  $0.97 \text{ g/m}$  の弦について、弦長を  $0.64 \text{ m}$ 、張力を  $T=61.05 \text{ N}$  として基本周波数を  $195.997718 \text{ Hz}$  に設定したときに、 $3.441 \text{ N/m}$  の負スティフネスが弦の中心に作用した場合について考慮してみると、 $a=0.32$  の場合の偶数次部分音において最大  $6.36 \text{ cent}$  もの値を取る。そして、比較的振幅の大きい部分音同士の干渉として、この場合  $f_3 - 3f_1 = 1.918 \text{ Hz}$  の顕著な唸が発生する。しかしながら、各部分音の振幅の受ける影響は極めて小さく、もっとも変化の大きい基本音においても変化率は約  $1.48\%$  にすぎない。また、吸引力の静的成分は  $0.865 \text{ N}$  の場合において、最大の静的変位量は約  $2\%$  である。<sup>(8)</sup>

### IV 伝送線路による類推

#### 1 集中負スティフネス

以上の結果から、普通で使用される電磁型変換器の吸引力が弦振動に与える影響は、主に負スティフネスによる振動周波数の変化であり、結果として起こる非調和性、及び唸の発生が大きな問題であると言える。そして、振幅への影響と、静的吸引力成分の与える影響も無視でき

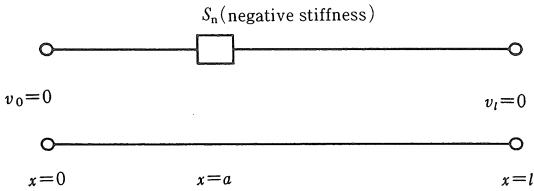


Fig. 5 Equivalent circuit for a string affected by negative stiffness by means of impedance analogy.

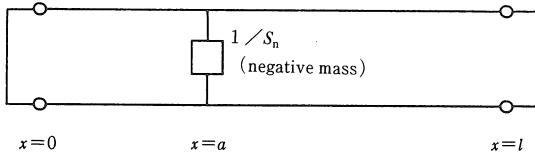


Fig. 6 Mobility analogy circuit for a string affected by negative stiffness.

ると考えられる。そこで、これらの結果を踏まえ弦の任意のポイントに負スティフネスと共に正弦波駆動力が作用する場合を考慮すると、Fig.4の両端固定の振動系に対応してインピーダンス類推によるFig.5の類推線路を考慮することができる。但し、先述のように吸引力の静的成分は省略している。同様に、Fig.6にはモービリティ類推による類推回路を示している。

ところで、伝送線路理論に対応させて考慮すると、弦の一端を正弦波駆動するとき弦の終端に生じる力を  $F_2$ 、振動速度を  $v_2$  とするとき、(6)式の解として任意の位置  $x$  における力  $F$  と速度  $v$  は回路方程式に対応して次のように得られる。

$$\begin{pmatrix} F \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma(l-x) & Z_0 \sinh \gamma(l-x) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma(l-x) & \cosh \gamma(l-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

伝送線路においては  $\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$ 、 $Z_0 = \sqrt{Z/Y}$  であり、 $\gamma$  は伝搬定数、 $\alpha$  は減衰定数、 $\beta$  は位相定数、 $Z_0$  は特性インピーダンスと呼ばれる。無損失伝送線を対象にするならば  $R=G=0$  として  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  となる。即ち、弦振動では  $Z_0 = \sqrt{\sigma T} = \sigma c$  となり明らかに弦の特性インピーダンスを示している。また、 $\alpha=0$ 、 $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$  であり、上式では  $\gamma = j\omega\sqrt{\sigma T} = j\omega/c$  となる。ただし  $c = \sqrt{T/\sigma}$  としたが、これは明らかに弦の波の伝搬速度であり、 $\omega/c$  は波長定数を示している。そこで、便宜上  $\omega/c \equiv k = 2\pi/\lambda$  とおくものとする。

ところで、正弦波駆動による任意回路の共振周波数は、

駆動点インピーダンスを零とおくことにより得られる。そこで、Fig.5のインピーダンス類推による回路を考慮してみるものとするが、まず(9)式より終端の負荷インピーダンスを  $Z_2$  とおくと、任意の点の駆動点インピーダンスは次のように与えられる。

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_2 \cos k(l-x) + jZ_0 \sin k(l-x)}{jZ_2 \sin k(l-x) + Z_0 \cos k(l-x)} \quad (11)$$

Fig.5については、負スティフネスの存在する位置と同時に正弦波駆動力も存在するものと考え、弦長  $a$  側の入力インピーダンス  $Z_{in1}$  と、弦長  $l-a$  側の入力インピーダンス  $Z_{in2}$ 、さらに負スティフネスとが直列接続になっているものと考えられる。従って、等価回路としてFig.7が得られるが、このとき弦長をそれぞれ  $a$ 、 $l-a$  とし、入力端を考慮することから  $x=0$ 、終端開放であることから  $Z_2 = \infty$  とすると、(10)式より  $Z_{in1}$ 、 $Z_{in2}$  は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{in1} &= -jZ_0 \cot k(l-a) \\ Z_{in2} &= -jZ_0 \cot ka \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

従って、このときの合成インピーダンスは次のように求められる。

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{S_n}{j\omega} - jZ_0 \cot ka - jZ_0 \cot k(l-a) \\ &= j \left\{ \frac{S_n}{\omega} - \frac{Z_0 \sin kl}{\sin ka \cdot \sin k(l-a)} \right\} \\ &= -j \frac{Z_0 \sin kl - \sin ka \cdot \sin k(l-a)}{\sin ka \cdot \sin k(l-a)} \end{aligned} \quad (13)$$

即ち、 $Z=0$  とおくと(8)式を零とおいたものと同一の結

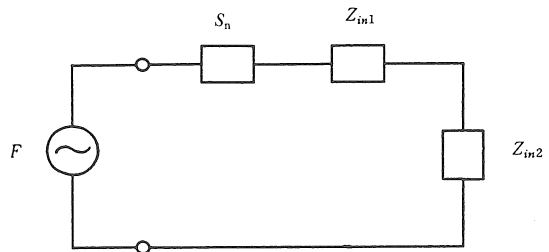


Fig. 7 Equivalent lumped constant circuit for a string affected negative stiffness.

果になることがわかる。

## 2 離散的な負スティフネス

弦の振動を電磁型変換器を用いて電気信号に変換する場合、例えば電気ギター等では、その設置位置により部分音構成が異なり音色が変化することから、複数の変換器が用いられている。そこで、 $m$  個の変換器の吸引力がそれぞれ独立に作用するものと仮定すると、Fig.8 に示すような振動系について次のような振動方程式を考慮することができる。

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^m \delta(x-a_i) |F_{oi} - s_{ni}(y)_{x=a_i}| \quad (14)$$

但し、ここで  $F_{oi}$ ,  $s_{ni}$  は、 $i$  番目の変換器の吸引力の静的成分と負スティフネスである。この解も Laplace 変換を用いて得ることができるが、特性方程式と共に極めて複雑な形となる。<sup>(9)</sup>

そこで、Fig.8 に対応した伝送線路を考慮してみる。即ち、先と同様に静力は省略し各負スティフネスと同時に正弦波駆動力  $e_i = E_i e^{j\omega t}$  が存在するものとする、インピーダンス類推として Fig.9 を得ることができる。このとき各駆動点における駆動力との関係は次式のように与えられる。

$$F = ZV \quad (15)$$

ここで、 $F$  は各点の正弦波駆動力を要素とする力ベクトル、 $Z$  は  $m$  行  $m$  列のインピーダンス・マトリクス、 $V$  は各点の速度を要素とするベクトルである。 $Z$  の要素  $z_{ij}$  は次のように考えることができる。

$$z_{ij} = \frac{F_i}{v_j} \quad v_i = 0 \quad (i=1 \sim m, i \neq j) \quad (16)$$

そこで具体的に考慮してみると、Fig.9 において  $v_k=0$  は線路の  $x=a_k$  において開放されることを意味する。従って、対角要素である自己インピーダンス  $z_{ii}$  は  $a_{i+1} - a_{i-1}$  を線路長として  $a_{i-1}$  の位置から  $a_i - a_{i-1}$  だけ離れた点に負スティフネス  $s_{ni}$  と、正弦波駆動力が加わるときの駆動点入力インピーダンスを表わす。また、伝達インピーダンスは、作用する駆動力と振動速度の位置が隣合うときのみ意味を有し、それ以外では線路が断線しているこ

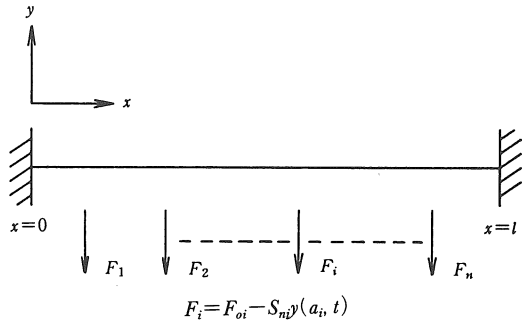


Fig. 8 String vibration system affected by discrete negative stiffness.

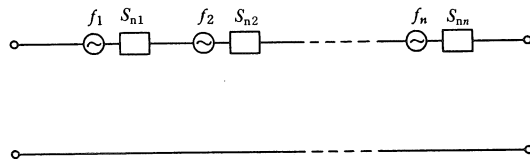


Fig. 9 Analogy circuit for a string affected discrete negative stiffness.

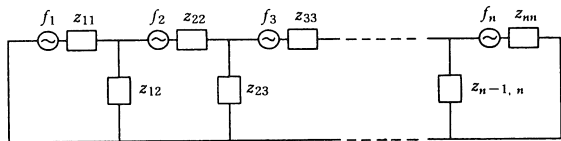


Fig.10 Equivalent circuit for a string affected by discrete negative stiffness.

とに相当し零となる必要がある。即ち、 $z_{ij}$  は  $i < j, j - i = 1$  のときに線路長  $a_j - a_i$ 、終端開放の伝達インピーダンスを意味する。以上の結果より各要素は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{ii} &= j \left\{ \frac{s_n}{\omega} - \left| \frac{Z_0 \text{sinc}(a_{i+1} - a_{i-1})}{\text{sinc}(a_i - a_{i-1}) \cdot \text{sinc}(a_{i+1} - a_i)} \right| \right\} \\ Z_{i, i+1} &= Z_{i+1, i} = -j \frac{Z_0}{\text{sinc}(a_{i+1} - a_i)}, \quad (i=1 \sim m-1) \\ Z_{ij} &= 0, \quad (|i-j| > 1, i, j=1 \sim m) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

これらの関係を等価回路として描くと、Fig.10 を得る

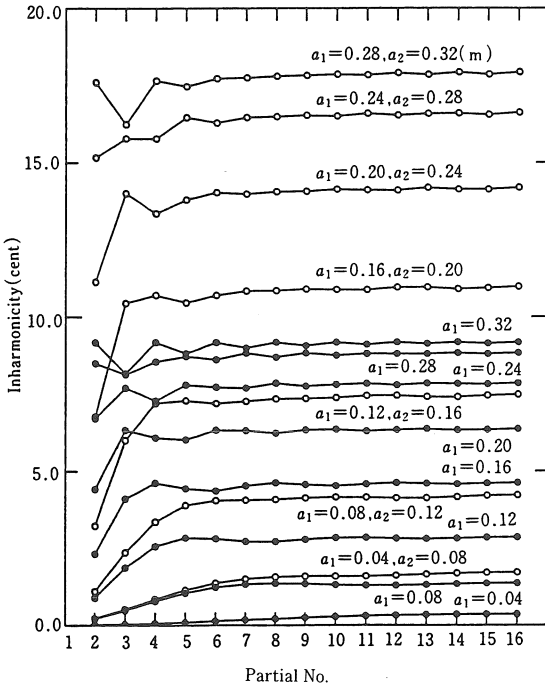


Fig.11 Inharmonicity of a string affected single or two negative stiffness. Affected position are taken parameters.  
 ● : single negative stiffness,  
 ○ : two negative stiffness. Negative stiffness : 5 N/m.

ことができる。もちろんこの時の振動周波数はインピーダンスマトリクスより次のようにして得られる。

$$|Z| = 0 \tag{18}$$

$m=2\sim 4$ の場合について、これより求められる振動周波数の Inharmonicity を求めて Fig.11, Fig.12 に示している。この結果は、(14)式を Laplace 変換を用いて解いた場合に得られる特性方程式より求められるものと等しい結果となる。<sup>(9)</sup>

### 3 集中質量

以上の議論は他の素子についても容易に拡張できる。例えば、特別な意味はないが弦の任意の点  $x=a$  に集中質量  $m$  が存在するとすると、振動方程式として次式を考えることができる。

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \delta(x-a)m \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=a} \tag{19}$$

さらに、同時に正弦波駆動力が存在するとすると、そのときの駆動点入力インピーダンスは次のように与えられる。

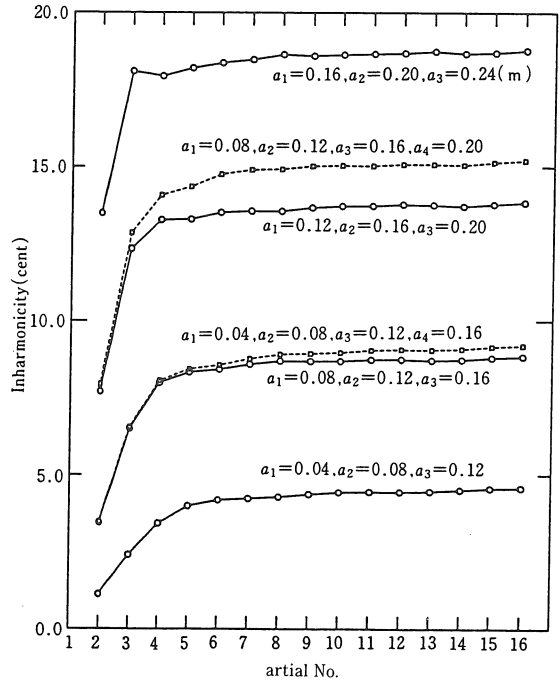


Fig.12 Inharmonicity of a string affected by plural negative stiffness.  
 ○ : three negative stiffness,  
 □ : four negative stiffness. Negative stiffness 5N/m.

$$Z_{in} = j \left\{ \omega m - \frac{Z_0 \sin kl}{\sin ka \cdot \sin k(l-a)} \right\} \tag{20}$$

このインピーダンスを零とおき、数値計算により振動周波数は求められる。なお、分散的に質量が存在しても前例に習ってインピーダンスマトリクスを得ることができるが、特に物理的な対応も考えられないので省略する。

## V 結 言

1次元分布定数系である弦に、集中的あるいは離散的に集中素子が付加する場合の振動問題を対象にして、伝送線路理論による類推により振動特性を求める方法について検討を加えた。特に、弦の振動を電気信号に変換する場合に、電磁型変換器が良く用いられるが、変換機構上不可欠である直流偏倚磁束による吸引力は静的成分と負スティフネス成分とに近似して考慮できる。そこで、集中的な負スティフネスが存在する場合、あるいは複数の変換器が設定された場合を離散的な負スティフネスが作用するものとして類推伝送線路を与えると共に、その駆動点入力インピーダンスを求め、これより振動周波数が与えられることを示した。また、集中的な質量が存在する場合も扱ったが、他のあらゆる素子についても同様

の考え方が適用できる。

このような方法は、通常の振動方程式から厳密解を求める解析過程と比較して、伝送線路理論がそのまま応用できるという簡易さと共に、現実的な物理的な意味も極めて明快に知ることができるなどの特徴がある。

尚、集中負スティフネス、及び離散的な集中負スティフネスが存在する場合の厳密な振動解、振動周波数の詳細と Inharmonicity 等の負スティフネスが存在することに起因した弦振動の挙動については別の論文<sup>8),9)</sup>に詳細に述べてあるので本稿では割愛した。

## 参考文献

- (1) 近野正, 尾山茂, 富川義郎, 菅原澄夫, “機械回路網とその応用,” 日本音響学会誌, 35, 36-42, 80-86, 131-135, 177-182(1979).
- (2) E. J. Skudrzyk, Simple and Complex Vibratory Systems (The Pennsylvania State University Press, University Park and London, 1968).
- (3) 中村勲, “打弦の振動 (ピアノの音響学的研究第1報),” 日本音響学会誌, 36, 504-512(1980).
- (4) 中村勲, “発音機構のシミュレーション (ピアノの音響学的研究 第2報),” 日本音響学会誌, 37, 65-75 (1981).
- (5) H. Fletcher, E. D. Blackham and R. Stratton, “Quality of piano tones,” J. Acoust. Soc. Am., 34, 740-761 (1962).
- (6) 柳沢猛, “高次うなりの研究 - 基音とその倍音とうなり-,” 精密機械, 35, 12-18 (1969).
- (7) A. C. VAN DER Woerd, “New Electronic Tuning Device for Pianos,” J. Acoust. Soc. Am., 51, 2010-2017 (1972).
- (8) 原圃正博, 富岡道明, 中村顕一, 富田義男, “集中負スティフネスの影響を受けた弦の振動,” 日本音響学会誌, 36, 615-623 (1980).
- (9) 原圃正博, “離散的な負スティフネスの影響を受けた弦の振動,” 日本音響学会誌, 44, 187-193(1988).
- (10) 原圃正博, 富岡道明, 中村顕一, “電磁型ピックアップ出力に見られる弦振動部分音の唸,” 日本音響学会講演論文集, 675-676, (1980).
- (11) 原圃正博, 富岡道明, “電磁型ピックアップの弦振動応答,” 日本音響学会講演論文集, 319-320, (1981).
- (12) M. Harazono, “Electromagnetic pickup response excited by a string vibration, J. Acoust. Soc. J (E) 10, 23 -29(1989).

