第４章　　ＣＡＥによる振動現象の解析

第4章　CAEによる振動現象の解析

学習のねらい
　本章では、CAE（数理モデル）によるシミュレーション結果を通じて振動現象を再確認すると共に、有限要素法による振動解析の概要を理解する。

【本章のねらい】
　数理モデル（運動方程式）を解くことにより、振動現象を表現できることを理解する。また、現在、広く利用されている有限要素法による振動解析手法の概要を知るとともに、NASTRANのCAE実習を通じて振動解析が自分でできるようになる。

【本章のながれ】
　運動方程式を再確認し、それを解くことにより振動現象が表現できることを学ぶ。次に、一般形状の連続体モデルを扱うための有限要素法の基礎を理解し、有限要素法による振動解析手法を理解する。そして、産業界での事例を示す。
　次章では、NASTRANを用いて架台モデルの解析実習を行う。更に、実験モード法により実測する金属バットの固有値解析も行い、実験との比較考察をおこなう。

第1節　振動現象の数値モデルとシミュレーション

学習のポイント
　振動現象の特徴をシミュレーションによるアニメーションを見ながら理解する。

【本節のポイント】
　数理モデル（運動方程式）を解くことにより、振動現象を表現できる。

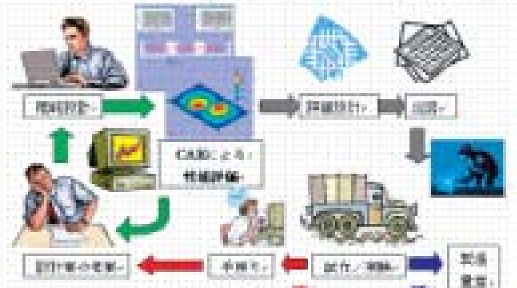
【本節の解説】
　運動方程式を再確認し、それを解くことにより振動現象が表現できることを実際のシミュレーション結果を示しながら説明する。

1−1 運動方程式のよるモデル化

振動現象は、運動方程式で表現できることが分かっている。CAEを活用することにより、PC上で振動検討を行うことができるのは、大きなメリットである。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

ここで、m:質量、c:減衰係数、k:剛性、x:移動量、f:外力



CAEを活用した設計

【テキストP195～P197参照】

【ポイント】

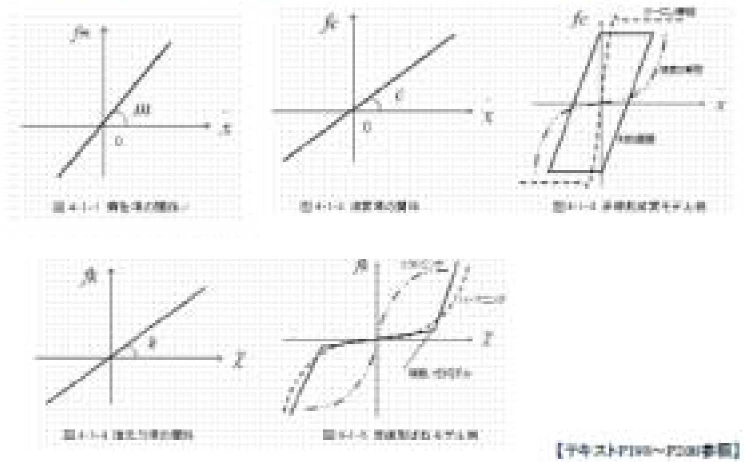
運動方程式を解くことにより振動現象が解析でき、PC上で振動検討を行うことができる。実測ができない場合や困難な場合、まだものが存在しない場合、実測しても現象の理解ができない場合など、CAE的アプローチが有効である。

【解説】

CAEにより実物がない段階でも設計検討が可能になり、最善案を持って製作図面へと進めることが出来る。そのことにより、確認試験での合格確率が上がると共に、たとえ不合格であったとしても事前に現象を理解していれば対策も直ぐに立てることが出来る。また、その検討プロセス自体をドキュメントに残し、ノウハウとして次に生かすことができる。

おおもとの支配方程式は分かっているが、各項の係数を決めるのが問題となる。次項に各項の係数の意味を示す。

運動方程式の各項の意味



【テキストP198～P200参照】

【ポイント】

運動方程式の各項の意味を理解する。これは、時々刻々の力の釣り合いを示している。

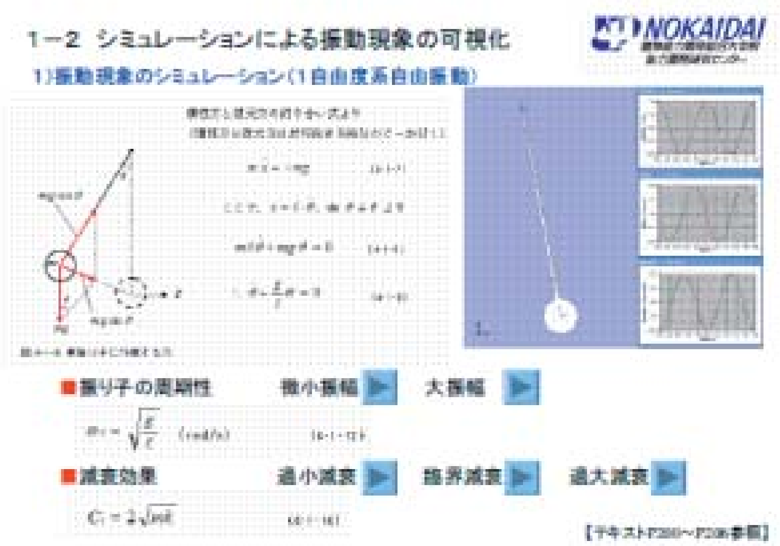
【解説】

第1項は、加速度に対する抵抗特性であり、慣性力の項である。質量を持っている物体に加速度が生じると運動変化を打ち消す方向に力(抵抗力)が発生する効果を表している。止まっている物体は動きにくく、動いている物体は止まりにくいという慣性の法則(law of inertia)現象を示している。

第2項は、速度に対する抵抗特性であり、減衰力の項である。速度に比例してやはり運動変化を打ち消す方向に力(抵抗力)が発生することを表している。流体内の抵抗力やダンパーによる抵抗力が減衰力である。第1項と異なるのは、減衰力により使われるエネルギーは熱などの形に変換され外部環境に消散していってしまう点である。実際は、グラフに示すような非線形特性が現れる。実測しないと求まらない値であり、実験との補完が必要となる。

第3項は、変位に対する抵抗特性であり、ばねによる復元力である。構造物の剛性と初期状態からの変位量(ズレ量)に比例する。すばやく初期状態からのズレを元にもどしたいという特性を持っている。実際は、グラフに示すような非線形性特性が現れる。

このような運動方程式をとくことにより、様々な振動現象が説明できる。



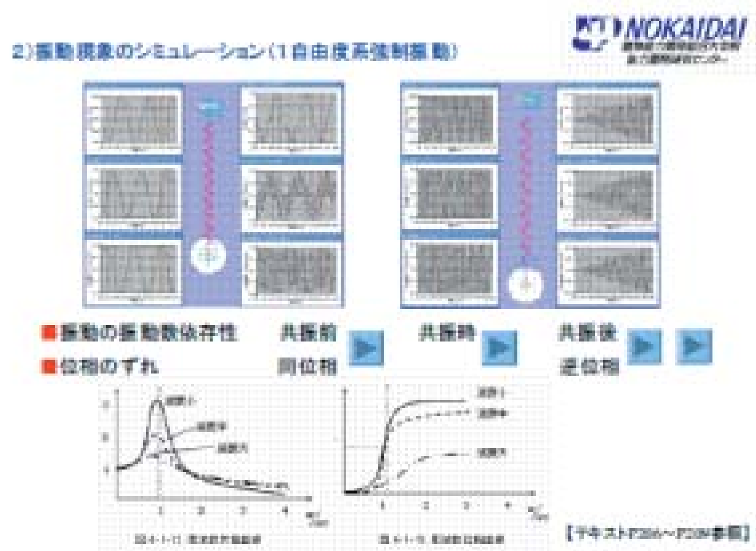
【ポイント】

構造物の静的応答解析は、荷重方向に変形し構造物の変形抵抗力と外力が釣り合う。その現象は感覚的であり分かり易いが、動的応答解析は、複雑であり感覚的にも理解し難い場合が多い。運動解析ツールを使って、説明する。

【解説】

これはばねでつながれた１自由度のおもりの運動と同じであり、等価ばね値をK=mg/lと考えれば、減衰の無い単振動の式と同じになる。微小振幅であれば理論解と一致するが、振幅が大きくなると合わなくなってくる。

また、減衰効果を入れた現象では、減衰量の大きさによって挙動が変化するのがわかる。これは、2次方程式の3つの解により挙動のタイプが変わること対応している。



【ポイント】

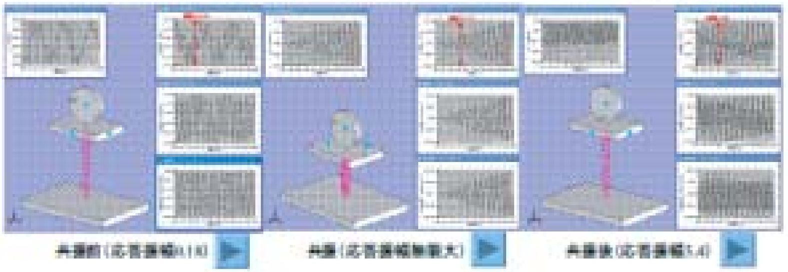
次に外力（強制振幅）が入力された場合を考える。地震時や大きい振動体に取り付けられたブラケット部品のような、加振源が自分自身に関係なく振動する場合は外力を強制変位としてモデル化できる。この場合、加振源の周波数と構造物の固有周波数との関係により応答の状態が大きく変化することになるので、設計上最も注意すべきある。

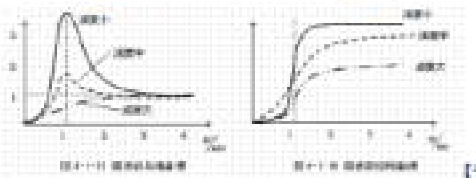
【解説】

外力の振動数と系の固有振動数（自由振動状態）の関係により応答が変化する。共振前、共振時、共振後の挙動違いをアニメーションで比べてみる。強制振動の場合は、外力の周波数と自分の自由振動数が交じり合う。また、共振前では外力と同位相で、共振後は逆位相の応答となる。

挙動の変化を周波数軸で見たものに周波数共振曲線、周波数位相曲線がある。

3）振動現象のシミュレーション（1自由度系力加振）





【テキストP210～P213参照】

【ポイント】

ここでは、偏心回転体によるアンバランス力が入力された場合を考える。これは、構造体に対して比較的小さい加振源からの入力が考えられる。この場合も、加振源の周波数と構造物の固有周波数との関係により応答の状態が変化するのは、前述と同じである。

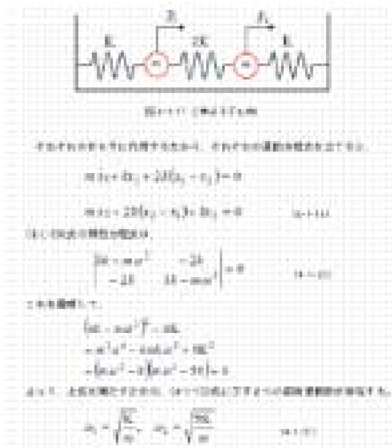
【解説】

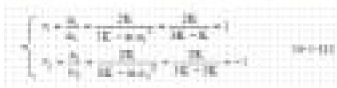
この場合、偏心回転体の回転数を上げていくと、遠心力により偏心荷重自体も大きくなってくる。停止状態から回転数を上げていくと、荷重レベルに応じて応答も大きくなる。共振点では荷重レベル以上に大きくなるが、共振点を過ぎると荷重レベルが大きくなっても応答は小さくなっていく。

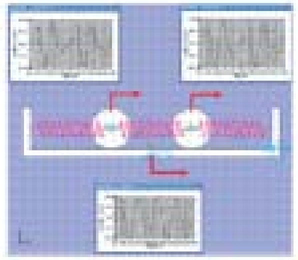
アンバランス力による周波数共振曲線、周波数位相曲線を示す。

(6)の振動実験装置と同様の現象である。

4）振動現象のシミュレーション（2自由度系強制振動）







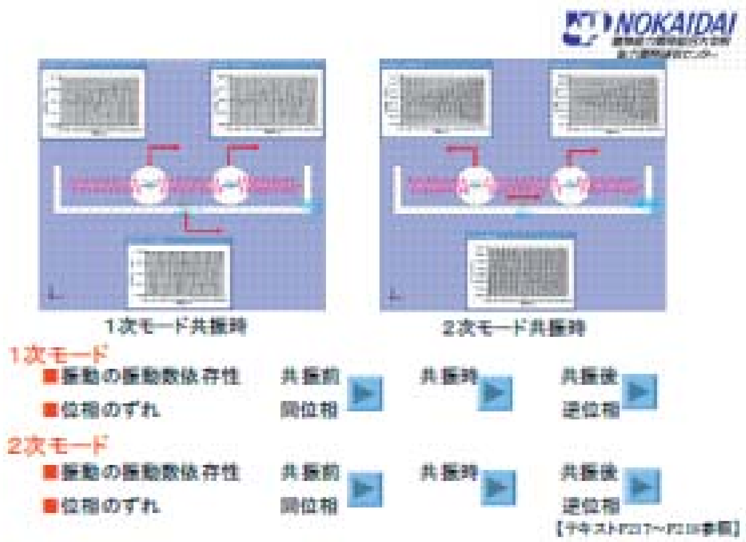
【テキストP214～P216参照】

【ポイント】

更に2質点系モデルを考える。2自由度モデルには、2つの共振点とその固有モードが存在する。モードとは、(4-1-22)に示すように変位量の比を表している。多自由度モデルが任意の荷重を受けた際の応答も、一自由度モデルの調和振動の重ね合わせで表現できる。

【解説】

それぞれのおもりの運動が連成している（影響し合っている）ことになり、全体の挙動は複雑なものになる。アニメーションで説明する。しかし、運動を分解してみると実は、2つの自由振動（正弦波）の重ね合わせで表現できることが分かっている。つまり、この2自由度系の議論は、そのまま多自由度系に拡張できる。



【ポイント】

1次モード、2次モードの違いを理解する。

【解説】

質点が2つ以上になると、固有振動とそのときのモードも2つ以上計算される。1次モードは2つのおもりが左右に同じ方向に動く(同位相)モードであり、2次モードは 2つのおもりが左右に反対方向に動く(逆位相)モードである。

以上の簡単なモデルでの議論より、振動現象を軽減させるためには一般に以下の対策が検討される。

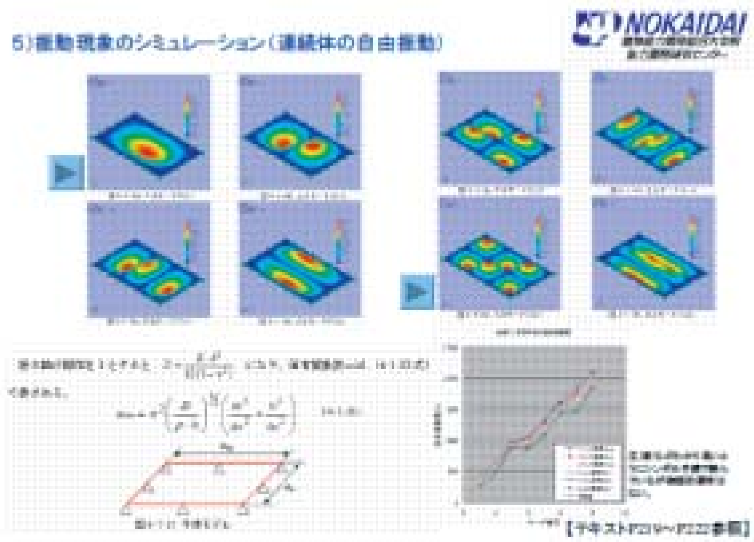
・共振点をすばやく通り過ぎる

・共振点をずらした剛性部材で支持する

・より高減衰のダンパーを取り付ける

・吸振器と呼ばれる外力と共振するサブ部品を主部品に取り付け、主部品自体の振動を吸収させる（反共振点を利用）

ここまでは、ばね・質点系モデルに置き換え、運動解析ツール(COSMOSMotion)により運動方程式を解いた例である。



【ポイント】

更に自由度を増やし、連続体の挙動をみてみる。ばねではなく、2次元または3次元的に連続している弾性体を扱う。実際の構造物は、エンジンブロック、工作機械、飛行機の翼、ラケット、ギターの弦などソリッドモデルの連続体の形をしている。

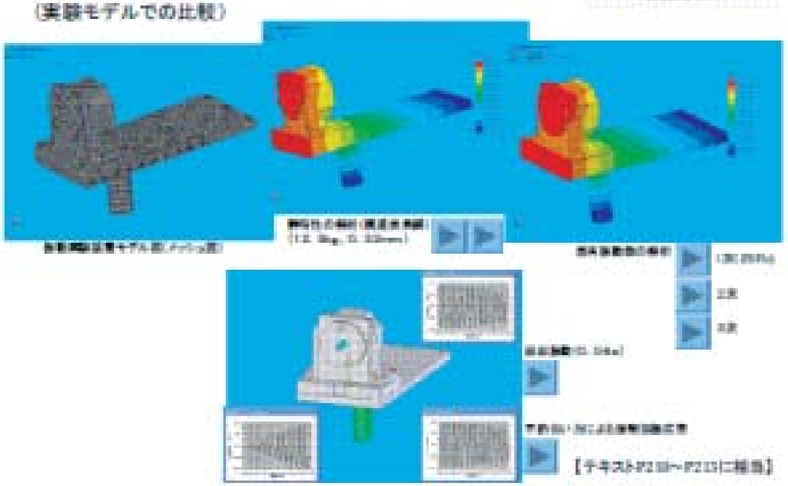
【解説】

後で説明する有限要素法を用いて計算した、全周を固定された平板の固有振動数と固有モードを示している。図中の赤い部分は振幅の大きいところである。固有振動数の各条件での比較はグラフで示している。理論値とシェルモデルによる計算結果が良く一致しているのが分かる。ソリッドモデルでは、固有振動数が高めに出ている。シミュレーション上、固有モードの各節点の変位値が表示されるが、絶対変位量を示しているのではないことに注意が必要である。また、カッコ内の数字は、長辺:短辺のモード次数を示している。

後で説明するが、薄板の曲げモードの場合はシェル要素が精度がよい。

6）振動現象のシミュレーション（不釣合い力による強制振動）

（実験モデルでの比較）



【ポイント】

実験装置をモデル化した強制加振力（回転不釣り合い力）による振動応答問題を解析してみる。

【解説】

構造解析ツールで、

1）可動部分をモデル化し、有限要素メッシュに分割する。

2）支点となるエッジをピン支持し、ばね下端部を固定する。自重を下向きに作用させ線形応力変形解析を実行する。物性は炭素鋼を用いた。

ヤング率=2.1e11 Pa、ポアソン比=0.28、密度=7700kg

製品重量は12.9kgで、ばね部の鉛直変位量は0.32mmである。

3）同じ境界条件で、固有振動解析を行う。1次共振モード25Hz。

機構解析ツールで、

4）不釣合い円盤おもりをある速度で回転させ、壁の時刻歴挙動を解析する。モデルの固有振動数近くで回転させると共振現象により、振幅が時間とともに増大していくのが分かる。

ばね定数は、12.9kg×9.81/0.32mm=395 N/mm

自由振動させると周期が0.04sで、25Hzであることがわかる。

25Hz(=9000deg/s)で強制加振すると、共振するが振幅が大きくなると制約を受けて振幅が小さくなる。

第2節　振動現象の解析の流れと数値解析手法

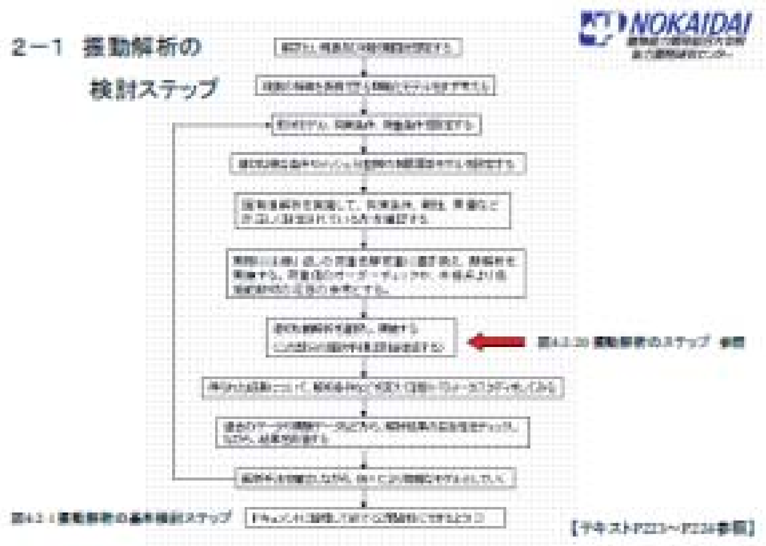
学習のポイント
　連続体の振動現象をシミュレーションするためには、有限要素法を用いることになる。その上で必要な最低限の有限要素法の基礎を学ぶ。また、振動解析手法の概要とその注意点等を学ぶ

【本節のポイント】

実際のモデル（連続体モデル）を解くためには、現在広く利用されている有限要素法を用いることになる。より良い解析を行うには、振動現象の理解と解析の知識の両方が必要である。

【本節の解説】

最初に、解析作業を始めるにあたっての検討手順及び心構えを示す。その後、有限要素法の概要及び振動解析の各種手法についての説明を行う。最後に、解析を行うに当たっての注意点やノウハウを示す。

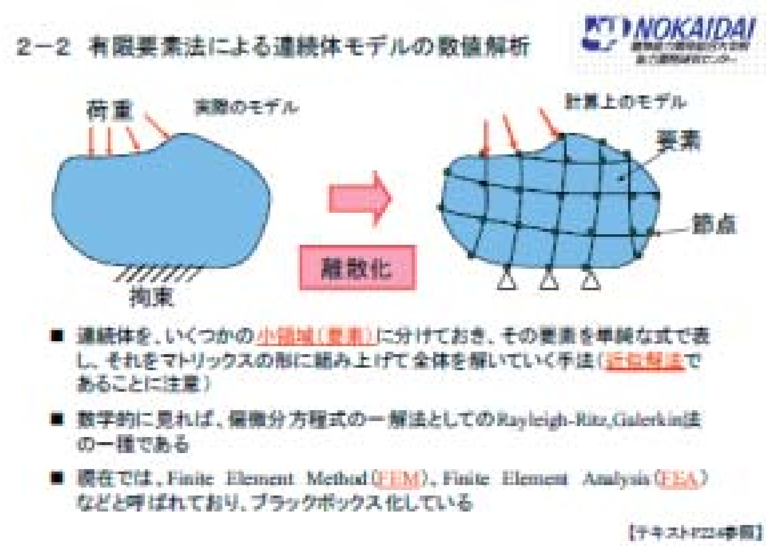


【ポイント】

振動解析を行う際の基本検討ステップをフロー図で示す。図を参照。

【解説】

まずは、解析作業を始める前に、どのようなモデルで、どのような条件のもとで、どのような結果が欲しいのかを明確にイメージすることが重要である。また、いきなり複雑なモデルを解析するのではなく、結果を見ながらモデルを修正して徐々にモデル規模や精度を上げていくことが必要である。適切な解析タイプを選んだり結果を評価するためには、現象の理解とCAEによる数値解析の基本的な知識も必要になる。これは、どの様な解析を行う上でも共通して言えることである。

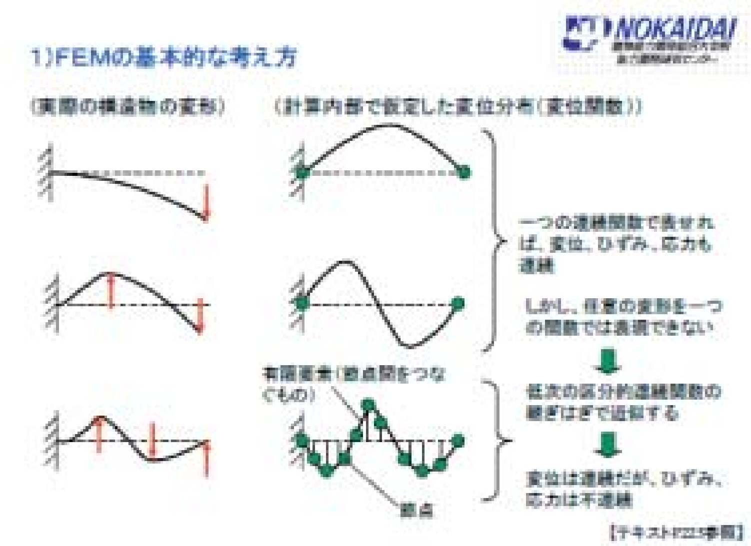


【ポイント】

任意の形状の連続体をどのように統一的手法による扱うかが問題となる。そのために領域内をメッシュ分割（離散化）する必要がある。

【解説】

連続体モデルの汎用的な近似解法として開発されたのが有限要素法（FEM）である。FEMでは、形状の複雑さや荷重の複雑さに応じて、構造体を小さな小領域（有限要素）に分割する。そして、一つの要素内では、比較的低次の（1次とか2次の）連続関数を仮定するものである。このことにより、任意の形状や境界条件に対して、要素分割数を変更するだけで同じ手法（低次の関数）を使うことが可能となる。

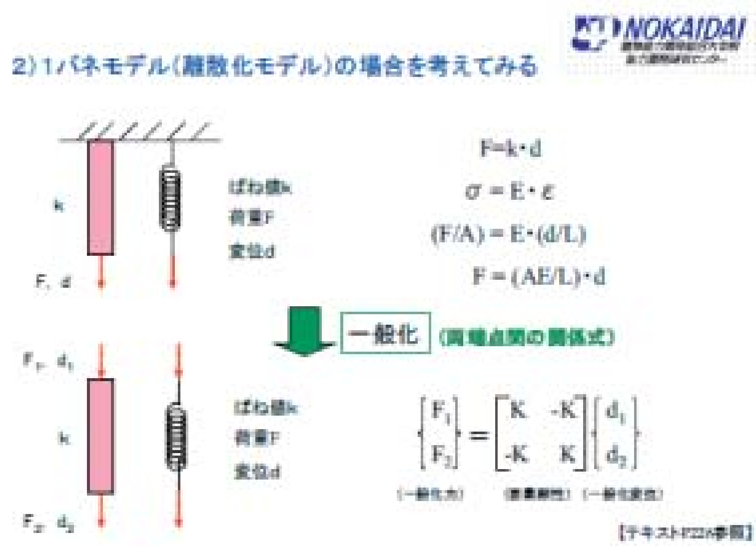


【ポイント】

簡単な片持ち梁の例で、FEMの基本的な考え方を示す。

【解説】

もし、対象物の変位分布が予め分かっていたら、その関数形を指定し未定係数を境界条件に合わせてフィッティングさせていけばよいが、任意の形状・荷重・拘束条件に対しては無力である。そこで、領域を細かく分割し、それぞれの条件による複雑性は領域分割の細かさで対応するという考え方を採用する。このことにより、任意形状を扱うことが可能となる。



【ポイント】

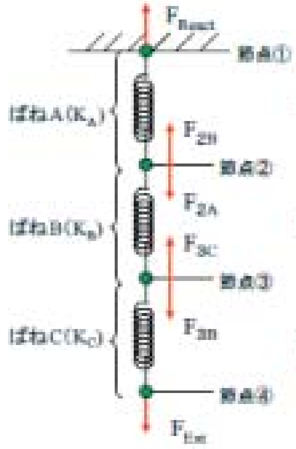
細かく分割した一つの要素(メッシュ)について、ばねモデルで考える。

【解説】

上端固定で下端に荷重が作用する場合は、図中上部に示すフックの式でよいが、それ以外の条件には対応できない。そこで、下部に示すマトリックス形(上端と下端の2点あるので2×2のマトリックスになる)に一般化式で表すことにすれば、様々な条件に対応可能な要素となる。上端が固定条件の場合は、$d_1=0$とすればよい。

NOKAIDAI

3）多体バネモデルの場合を考えてみる



まずはそれぞれのばねを独立させて一般化

$$\begin{Bmatrix} F_{1A} \\ F_{2A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_A & -K_A \\ -K_A & K_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1A} \\ d_{2A} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2B} \\ F_{3B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_B & -K_B \\ -K_B & K_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{2B} \\ d_{3B} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{3C} \\ F_{4C} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_C & -K_C \\ -K_C & K_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{3C} \\ d_{4C} \end{Bmatrix}$$

【テキストP226参照】

【ポイント】

次に任意の形状に対応することを考える。

【解説】

各要素の一般化表示ができれば、すべての要素に対して同じ処理で対応が可能となる。たとえば、このようにばねが3本あれば、節点力および変位を変数として同じ形の要素剛性式（一般化されたフックの式）が3つ立てられる。あとは、ばねのつなぎ方をどのように考慮するかである。

NOKAIDAI

4）要素剛性マトリックスから全体剛性マトリックスの作成

それぞれのばね関係式を全体の枠組みの中に機械的に組込む

その後、既知の値を代入して未知の値を求める

$$\begin{Bmatrix} F_{1A} \\ F_{2A}+F_{2B} \\ F_{3B}+F_{3C} \\ F_{4C} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_A & -K_A & & \\ -K_A & K_A+K_B & -K_B & \\ & -K_B & K_B+K_C & -K_C \\ & & -K_C & K_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

0　F_{Ext}　0

駆動項（既知）　全体剛性マトリックス（既知）　節点変位（未知）

【テキストP227参照】

【ポイント】

全体モデルの中の各要素（ばね）の働きを考える。

【解説】

それぞれのばねの要素剛性式ができたら、それをばねのつなぎ具合に応じて全体の力と変位の関係式（マトリックスの形になっている）に埋め込んでいけばよい。たとえば、ばねAは、節点①と②をつないでいるばねなので、その節点①と②の関係を示す位置のところにばねAの要素剛性式を埋め込めばよい。同様にばねB,Cも関係する節点位置に埋め込んでいく。そのことにより、構造全体に対する荷重と変位の関係式を立てることが出来る。そして、そこに既知の境界条件を代入して、未知量を連立方程式を解くことにより求めることができる。この場合、d_1に0,F_{4C}に外力を入力する。節点2,3の節点力はつりあい状態にあり0である。

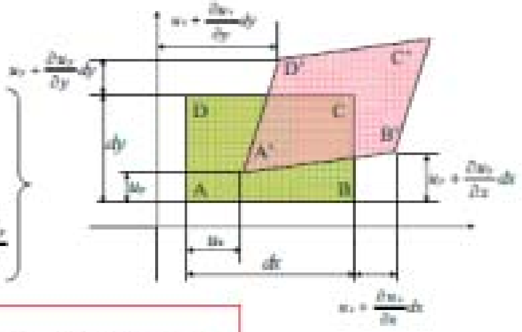
ここまでは、ばね-質点系の任意モデルをシステマティックに扱う手法であるが、更に連続したモデルを扱う考えを以下に示す。

5）2次元連続体の場合を考えてみる

NOKAIDAI

ひずみと変位の関係

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + \dfrac{\partial U_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$



近似1！
・微小変形仮定（テーラー展開2次以上の項無視）
近似2！
・剛体回転項の無視

【テキストP227参照】

【ポイント】
いままでは1次元のばねモデルで説明してきたが、2次元的に連続している場合を考える。ばねのようにいきなりフックの法則では表されない。

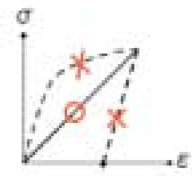
【解説】
まず、要素内の変位量とひずみの関係を考える。これは、材料力学より導出されるように2次元モデルの場合、この式のように変位の空間微分がひずみとなる。変位uの変化率がひずみεであるが、2方向の変化が生じ偏微分の形で表現される。また、やや専門的になるが、赤色の近似1、2が含まれていることも覚えておくとよい。

6）応力とひずみの関係（[D]マトリックスの定義）

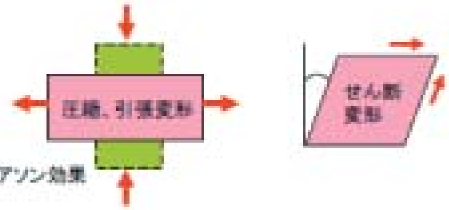
NOKAIDAI

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$\{\sigma\} = [D]\cdot\{\varepsilon\}$ （フックの法則の2次元版）



近似3！
・応力-ひずみが線形範囲



ポアソン効果

【テキストP228参照】

【ポイント】
次に要素内のひずみと応力の関係を見る。

【解説】
2次元問題になるとヤング率Eだけでなくポアソン比νが影響してくるのがわかる。ポアソン比は、縦ひずみと横ひずみが影響しあう係数であり、2次元および3次元連続体の特徴である。ポアソン比0なら、縦と横は独立になる。要素内の応力とひずみは、この式のように[D]マトリックスで関係付けられる。ここでも、赤字のように近似3が含まれている。

7）最小ポテンシャルエネルギーの原理

内部ポテンシャルエネルギー　Uは

$$U=\frac{h}{2}\iint_D(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})dxdy$$

$$\int_0^x Fdx=\int_0^x(kx)dx=\frac{1}{2}kx^2$$

（フックの法則）

外部ポテンシャルエネルギー　Vは

$$V=-\{h\iint_D(u_0f+u_0g)dxdy+h\int_S(u_0Px+u_0Py)ds\}$$

（物体力）　（表面力）

よって、総ポテンシャルエネルギー　Eは、

$E=U+V$

また、ポテンシャルエネルギー最小条件より釣合い状態では $\boxed{\dfrac{\partial E}{\partial d}=0}$

【テキストP221参照】

【ポイント】

力の釣り合い式と等価な最小ポテンシャルエネルギーの原理を利用する。

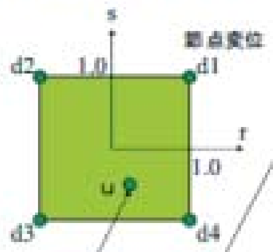
【解説】

前出の「ひずみと変位」「応力とひずみ」関係を運動方程式（力の釣り合い方程式）に代入して解けばよいのだが、モデルが複雑になると解けなくなる。そこで、まわりくどいようであるが、要素内のひずみエネルギーを求め、そのエネルギーが最小のとき、力の釣り合い式と等価な式となるという最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いることにする。これは、外力も含めて系のひずみエネルギーが最小のときが一番安定しており静的に釣り合い状態にあることを示している。そのためには、要素内のひずみと応力を求め、それを要素内で積分して総ひずみエネルギーを求めて、その極値=0の関係式を満たせばよい。

以下では、要素内のひずみエネルギーと節点変位の関係を示す。

8）要素内の形状関数定義

要素内の変位分布の仮定



要素内の任意の場所の変位uを内挿する

正規化された座標に写像変換する

$$u=\Sigma\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}(1+r)(1+s)d1\\ \frac{1}{4}(1-r)(1+s)d2\\ \frac{1}{4}(1-r)(1-s)d3\\ \frac{1}{4}(1+r)(1-s)d4\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}N1, N2, N3, N4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d1\\ d2\\ d3\\ d4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N\end{bmatrix}\{d\}$$

各節点からの寄与率（重み）

近似４！

・要素内の変位分布を任意に仮定

【テキストP221参照】

【ポイント】

次に、要素内のひずみエネルギーを求めるためのひずみと応力はどの様に求めるのかを説明する。

【解説】

ここで、有限要素法特有の考え方が登場する。1要素内は微小な面積であり、変位分布は単純な形状で近似できると仮定するのである。つまり、要素内の任意点の変位uと節点変位d1,d2,d3,d4の関係を1次または2次式程度の関数で決めてしまうのである。関数Nは形状関数(shape function)または変位関数(displacement function)と呼ばれているもので、有限要素法の特徴を示すものである 。このように、要素内の変位分布を物理法則とは関係なく決めてしまうために、十分細かいメッシュ分割が必要になる。

メッシュ分割を変えて何度か解析してみることを強く勧める。メッシュを細かくしても解があまり変化しなければ、十分なメッシュ分割ができていることになる。

9) ひずみと変位の関係([B]マトリックスの定義)

NOKAIDAI

従って、要素内の任意の場所のひずみは、ひずみ-変位関係式に代入すれば

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}$$

$$= [\mathrm{B}] \cdot \{\mathrm{d}\}$$

[B]マトリックスは、節点変位を要素内のひずみに変換するマトリックスで有限要素法で重要なマトリックスとなる。(大変形問題では節点変位から剛体変位分を除いてひずみを求める必要がある)

要素内のひずみが求まれば、応力-ひずみ関係式によりすぐに要素内の応力も求まる。

【テキストP211参照】

【ポイント】

要素内のひずみと応力を節点変位で表したい。そうすれば、節点変位に関する釣り合い式で最終的に表現できることになる。

【解説】

要素内の変位が節点変位と[N]マトリックスで表現できるとすれば、要素内のひずみと節点変位とはこの式のように[B]マトリックスで関係付けられることになる。すると、要素内のひずみと応力の関係は[D]マトリックスで関係付けられるので、結局、要素内の任意の場所のひずみと応力はいずれも節点変位と関係付けられることになる。

10) 剛性マトリックスの導出(フックの法則)

NOKAIDAI

従って、要素内のひずみ、応力より内部エネルギーが計算できる。
Π=U+Vをマトリックス表示すると

$$\Pi = \underbrace{\frac{h}{2}\iint_D \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dxdy}_{\text{(内部エネルギー)}} \underbrace{- \{d\}^T\{f\}}_{\text{(外部エネルギー)}}$$

$$= \frac{1}{2}\{d\}^T \underbrace{\left\{h\sum_e \iint_D [B]^T[D][B]\,dxdy\right\}}_{\text{(要素剛性マトリックスの足し合わせ)}} \{d\} - \{d\}^T \sum_e \{f\}$$

$$= \frac{1}{2}\{d\}^T \underbrace{[K]}_{\text{(全体剛性マトリックス)}} \{d\} - \{d\}^T\{f\}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{d}} = 0 \quad \text{より} \quad \boxed{[K]\{d\} - \{f\} = 0}$$

節点変位と節点外力の釣合い式が求まる。結果的にばねモデルと同じ形となる。

【テキストP211参照】

【ポイント】

内部ひずみエネルギーが計算できれば、それの最小値をとることにより力の釣り合い状態を表現できる。

【解説】

要素内のひずみと応力が節点変位で表現できているので、それをひずみエネルギーの式に代入する。すると、ひずみエネルギーが節点変位と全体剛性マトリックスの積で表される(エネルギーなので[K]の前後から{d}をかけた形となる)。その極値を取ることにより、力の釣り合い式と同等のフックの関係式が導かれる。あとは、ばねモデルと同様に、既知の境界条件を入力して未知変数を連立方程式を解くことにより求めればよいことになる。

つまり、2次元の連続体モデルもばねモデルと同様に節点のつながり具合から、全体の力の釣り合い式を求めることができる。この2次元の手法はそのまま3次元に拡張することができる。

11）連続体の運動方程式の定義

連続体の運動方程式も最終的には下のようにマトリックスで表現できる

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\}$$

[K]：全体剛性マトリックス

[M]：質量マトリックス

コンシステントマス　$[M]=\sum_e\int_v [N]^T\rho[N]dV$

ランプトマス（節点にマスを集中させることにより対角マトリックス）

【ポイント】

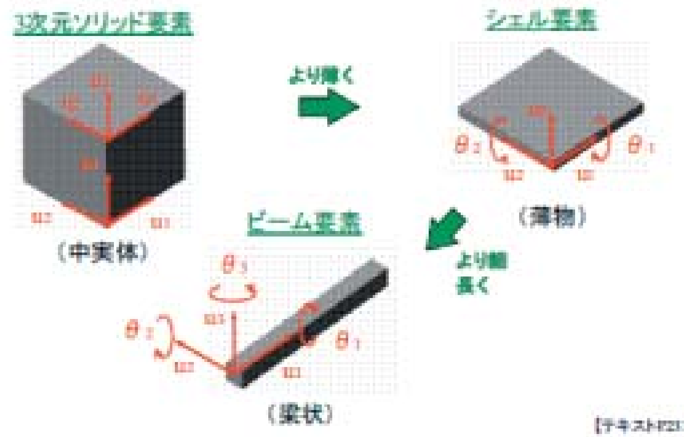
更に、連続体の運動方程式を有限要素法により解析することを考える。

【解説】

今までに、連続体の[K]マトリックスを作成する手順を示した。運動方程式には[K]マトリックスのほかに[M]マトリックスが存在する。この[M]マトリックス作成の仕方は、[K]マトリックス作成と同様に内挿関数を使って求めるやり方と単純に支配面積比で節点に質量を割り振るやり方がある。前者をコンシステントマス、後者をランプトマスと呼ぶ。いずれも、[K]マトリックスよりは簡単に作成可能である。メッシュがある程度細かければ、後者のやり方でも問題ないことが確認されている。

つまり、連続体の運動方程式も節点に関するマトリックスの形で表現可能となる。

12）各有限要素の概念



【テキストP211参照】

【ポイント】

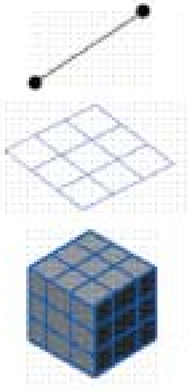
有限要素メッシュタイプの代表的な3種類について説明する。

【解説】

有限要素は大きく分けてビーム要素、シェル要素、ソリッド要素の3つに分けられる。ビーム要素は構造部材が細長い棒のような形状のものに用いられる。また、板金部品のように薄い板を折り曲げて作ったような構造物の場合には、シェル要素を用いる。ソリッド要素は比較的肉厚の厚い鋳物部品のような形状に用いられる。

ここで、自由度の違いも場合によっては重要になる。ソリッド要素は各点に3方向の並進自由度を持っている。シェル要素は板厚方向の節点を中立面1点に集約してしまっているが、その代わり面外方向の回転自由度を追加している。ビーム要素は、更にシェルの幅方向の節点を中立位置に集約しているが、もう一つ回転自由度を追加している。

13)各有限要素タイプの特徴



ビーム要素	1本の線(面積なし) 属性として、断面積(A)、 断面2次モーメント(I) 断面ねじりモーメント(J)	フレーム構造物に向いている 計算時間が早い 属性データの準備が必要 仕口などの応力評価ができない
シェル要素	サーフェス(体積なし) 属性として、板厚(t)	薄肉形状に最適 精度が良く、計算時間も早い 板厚変化があると、中立面をとるのが難しい フィレット部などの応力値が評価出来ない
3次元ソリッド	ソリッド(体積あり) 属性データは不要	厚肉形状に向いている モデル化のノウハウが少ない 薄肉に対して精度が悪い メモリーと計算時間がかかる

※すべての要素において、材料特性(E, ν)は必要

【テキストP213参照】

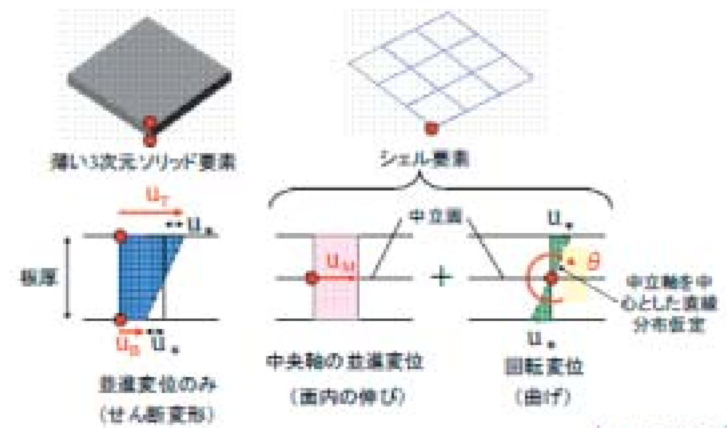
【ポイント】

各要素の特徴を示す。

【解説】

図表の通り、形状情報を規定するために、ビーム要素は、ラインであるため断面特性を属性として別途指定してあげなければならない。シェル要素はサーフェスであるため、板厚情報を別途指定する必要がある。ソリッド要素は、ボリュームであるため属性データは不要である。3次元ソリッドCADモデルを解析する際には、ソリッド要素が適している。

14)ソリッドとシェルの違い(ずれと曲げ)



【テキストP213参照】

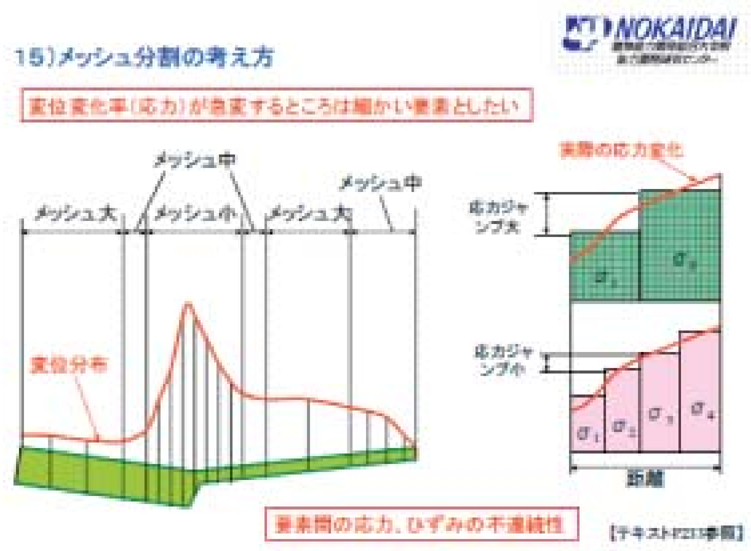
【ポイント】

ソリッド要素とシェル要素の表現の違いを示す。これは、前スライドで示した自由度の違いによるものである。

【解説】

ソリッド要素は、面内の伸び収縮およびせん断(ずれ変形)を表現し易く、シェル要素は面内の伸び収縮および曲げ(回転変形)を表現し易い。このそれぞれの特徴を生かして要素を選択する必要がある。つまり、薄板形状で曲げ変形が支配的なものはシェル要素、ブロック状の形状で、せん断変形が支配的なものはソリッド要素を使うべきである。

平板の固有値解析でも、シェル要素ではメッシュが粗くても理論解とよく一致していたことが分かる。



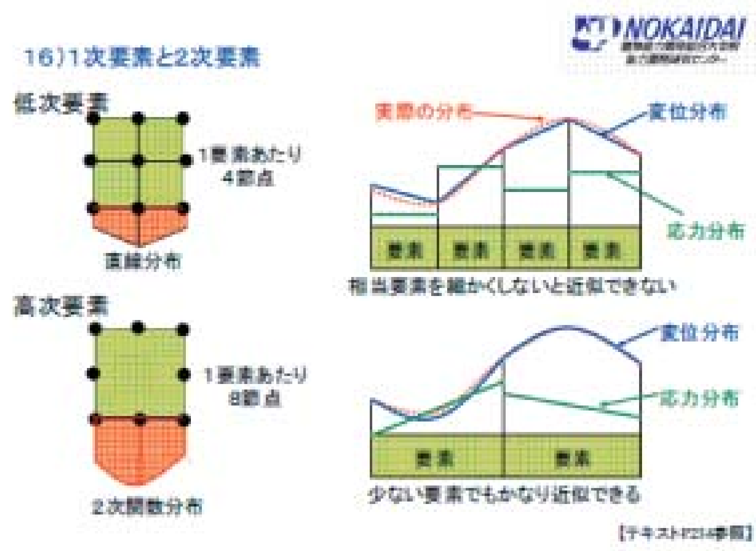
【ポイント】

メッシュ分割の考え方を示す。

【解説】

有限要素法では、節点変位は連続するが、隣り合う要素間でひずみや応力は必ずしも連続する条件は入れられていない。したがって、精度の良い解析を行うには要素間の応力ギャップ量（ジャンプ量）をなるべく小さくさせる工夫が必要となる。そのためには、図のように、特に応力変化の激しい部位を集中的に細かくする必要がある。単に応力値が高くても変化率が少なければ、比較的粗いメッシュでも良いことになる。現実的にはすべての領域でメッシュを細かくすることはできないので、応力集中部または注目部位のみを細かくして解析することが行われる。

応力集中が予測される場所や、解析した結果を見て特定した応力集中場所を部分的に細メッシュ分割して解析を再実行することが必要である（ローカル細メッシュ分割という）。これを自動で行ってくれる機能にアダプティブメッシュ法というのがある。



【ポイント】

低次要素と高次要素の違い。

【解説】

要素には要素の角点のみに節点をもつ1次要素(first order element)と呼ばれている要素と各辺の中間にも節点をもつ2次要素(second order element)と呼ばれているものがある。1次要素よりも2次要素のほうが、1要素内でより高次の変形モードまで表現できるようになり、応力ギャップ量を小さく抑えることができる。その分格段に精度が向上することが確認されており、通常2次要素を使用することを強く勧める。

物理的なメッシュサイズを小さく再分割していく方法をH法、メッシュサイズは変更しないが要素内の節点数を増やし形状関数の次数を上げていくのをP法と呼ぶ。

2－3 振動解析の各種数値解析手法

NOKAIDAI

現象からみたシミュレーションの分類

■静解析　　■線形解析

■動解析　　■非線形解析

- ■モード解析
- ■直接時間積分解析

- ■材料非線形
- ■幾何学非線形（大変形解析）
- ■境界条件の非線形

※これらの組み合わせで考えられる

■固有値解析（周波数領域の世界で考える）

モーダルパラメータの解析（但し、モード減衰は計算できない）

【ポイント】

構造解析の世界では、大きくこのような分類がされる。

【解説】

大きくは、静解析と動解析、線形解析と非線形解析があり、2×2の組み合わせとなる。

その中で固有値解析というのは、周波数領域での特性を求める少し特別なやり方であり、構造物のモード特性（固有振動モードと固有振動数）を運動方程式から求めるものである。

動解析・固有値解析には、剛性マトリックス[K]とマスマトリックス[M]が必要となる。

1）固有振動解析（固有値解析）とは

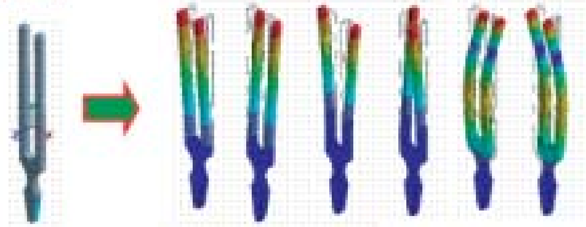
NOKAIDAI

■すべての構造物は、ある周波数（振動数）で振動する特性があり、その周波数を固有値（固有振動数）という。各振動数にはモード形状と呼ばれる振動形態が付随する。

■構造物は固有振動数のどれか1つと（振動の方向が）一致した動的荷重で加振されると非常に大きな変位が生じる（共振という）。

■固有値解析では、固有値とモード形状が求められる。 動的荷重は入力できない。また、計算結果として振幅も求まらない。

（振動数とその時の振動パターンのみが求まる。変位量として出る計算値は物理的な意味はない。）



【ポイント】

振動現象を把握する基本は、モード特性を求めることである。

【解説】

固有値解析では、具体的応答量は求められないが、共振点とその共振モードが求められる。あとは文章参照。

2）振動特性方程式の導出

固有振動解析の実施

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [k]\{d\} = R(t)$$

いま、減衰がないとし、外力Rが作用していない状態を考える

$$[M]\{\ddot{d}\} + [k]\{d\} = 0$$

ここで、$d = \sin\omega t \cdot \{d_0\}$ とおけば、

$\dot{d} = \omega \cdot \cos\omega t \cdot \{d_0\}$

$\ddot{d} = -\omega^2 \cdot \sin\omega t \cdot \{d_0\}$

（時間変数）と（空間変数）の変数分離

これらを代入すれば、$\{[K] - \omega^2[M]\}\{d_0\} = 0$ ⇒ $\boxed{\det\{[K] - \omega^2[M]\} = 0}$

注意1）時間項がキャンセルされて、振動数ωとその時のモードを現す式となる。このとき、右辺（駆動項）が0なので、モードの絶対量は実際の変形量を現していない

注意2）荷重を考慮できる固有値解析もあるが、この荷重は[k]に影響を与える

【テキストP234～P235参照】

【ポイント】

運動方程式から、自由振動には本質的に関係のない減衰項と外力項をなくして考える。

【解説】

変位dが周期変化（自由振動）するとして$d = d0 \cdot \sin\omega t$ とおいて運動方程式に代入すると、時間項がキャンセルされて、モード空間での特性を表現する式となる。数学的には、行列式（デターミナント）が0の条件が導き出される。この条件を解くことにより、周波数領域での特性が現れる。

そのマトリックの固有値ωと固有ベクトル$\{d_0\}$を求める数値的解法としてはいくつか用意されている。次頁に主な手法とその特徴を示す。

ここで、固有ベクトル$\{d_0\}$の定数倍はすべて解となるので、$\{d_0\}$は分布パターンを示していることになる。

3）固有値解析の各種数値解析手法

・インバースパワー法

指定された範囲内で、最低次の固有値と固有モードから順番に検出していく方法である。古典的な方法であるが、大規模モデルには時間がかかり、モードの見落としもある。そこで、通常はSturmシーケンスチェック付アルゴリズムが用いられる。

・ハウスホルダー法

小規模で密なマトリックの問題に向いている。対称マトリックスを三重対角化してから、固有値を求める。見落としもなく確実な方法であるが、自由度の小さいモデル向きである。各種手法の前処理として使われることも多い。

・サブスペース法

全体のモデル自由度に対して、解きたい次数分だけの自由度を持ったより小さいサブスペースに縮退した後、固有値を求める。従って、ある程度の大規模問題までカバーでき、デフォルトの手法として指定されていることが多い。しかし、欲しい固有値の数より多くの固有値を計算しておかないと精度が落ちることが知られている。

・ランチョス法

現在、改良されたランチョス法はもっとも効率が良く、解の見落としもない。従って、超大規模なモデルでは、ランチョス法が唯一の方法になる。しかし、厳しい問題など固有値が近接したり重根が存在する場合は、処理の仕方によっては大きな誤差を含む。サブスペース法でも計算可能な場合は、双方で計算をしてみることを勧める。

【テキストP235～P236参照】

【ポイント】

代表的な固有値解析の数値解析手法を示す。

【解説】

文章を参照。一般的にはサブスペース法、大規模モデルにはランチョス法を用いる。

4）理論モード解析とは

外力が作用する多自由度系の振動応答解析に対して、モード解析と呼ばれる便利な方法がある。

これは、予めその振動系の固有振動数と固有モードを計算しておき、各モード間の正規化条件と直交条件を巧みに利用することによって、多自由度系の連立運動方程式を1自由度の運動方程式に変化する方法である。

いくらの多自由度モデルであっても、1自由度の微分方程式の足し合わせで応答値を求めることができる。

【テキストP216参照】

【ポイント】

外力が作用した場合の動的な応答値を計算するやり方にモード解析法がある。

【解説】

今まで、複雑な多自由度モデルもマトリックの固有値問題を解くことにより、構造物のモーダルパラメータを抽出することが出来た。ここでは、更に多自由度系モデルの強制振動解析手法を紹介する。この解法は、あらかじめその構造体の固有振動数と固有振動モードを求めておき、実現象の振動を周波数ごとのモードの足し合わせとして変換する。固有モードの足し合わせと見ることにより、後で説明する振動モード間の正規化条件と直交条件が使えて、多自由度の連成振動を1自由度の単振動応答の足し合わせに変換できることになる。1自由度系の強制振動であれば、先に見たように簡単に応答が求まるので、大規模モデルの振動応答解析が効率よく行えることになる。

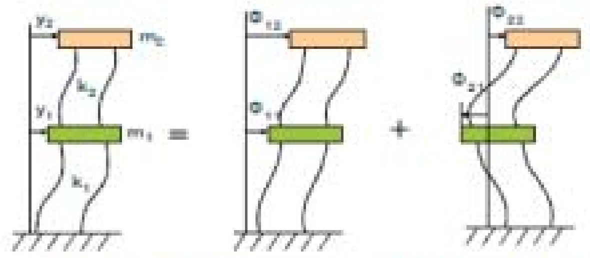
（参考）

実験モード解析は、入力と出力間の伝達関数を測定して、いくつかの伝達関数よりモーダルパラメータを同定する。

理論モード解析は、特性方程式よりモーダルパラメータを計算し、モードを合成することにより伝達関数を求める。

5）実世界とモード世界の関係

マトリックスを展開した形で、下記の2自由度モデルのモード解析を具体的に見てみよう



現実世界の変位　　固有空間の1次モード　　固有空間の2次モード

任意の変形および外力が正規化モードの組合せで表現できるという前提に立つ。これは、フーリエ級数を用いて任意の関数をsin、cos の組合せで表現できることと同様である。

【テキストP217参照】

【ポイント】

実世界の空間とモード空間の世界の関係。

【解説】

いま、図のように現実の世界での2自由度（たとえば、2階建て構造物）を考える。そして、その2階建て構造物は、固有値解析を行うことにより、1次固有モードと2次固有モードに分解される。各モードの足し合わせに分解できることは数学的に証明されるが、フーリエ変換により、任意の変形はsin,cos波の組み合わせで表現できることと同様と考えることができる。

分離できるとは、独立した変数に分解できるということである。

NOKAIDAI

6）モード世界への変換

直交条件より $\underbrace{m_1\Phi_{11}\Phi_{21}}_{\text{節点1について}} + \underbrace{m_2\Phi_{12}\Phi_{22}}_{\text{節点2について}} = 0$

正規化条件より $\underbrace{m_1\Phi^2_{11} + m_2\Phi^2_{12}}_{\text{モード1について}} = 1$

$\underbrace{m_1\Phi^2_{21} + m_2\Phi^2_{22}}_{\text{モード2について}} = 1$

（1）式

前の添え字がモードNo.
後の添え字が節点No.

今、任意の変形y_1、y_2を下式で表せることを考える

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1\Phi_{11} + A_2\Phi_{21} \\ y_2 &= A_1\Phi_{12} + A_2\Phi_{22} \end{aligned}\right\} \text{（2）式}$$

【テキストP236～P237参照】

【ポイント】

固有モードの特徴を示す。

【解説】

（1）式は、異なるモード間では影響し合わない（連成しない）で、自分自身のモード内で完結していることを示している。数学的には異なるモード間で直交関係が成り立つとも言う。また、自分自身のモードの掛算はスカラー量となり、1に基準化できる。基準化しないスカラー値をモード質量と呼ぶこともある。ここで、重要な特性は、異なるモード間の掛算の項はすべて0となることである。

また、次項では、（2）式のように実変位量が異なるモードの足し算で表現できることを簡単に確認してみる。

NOKAIDAI

以下（2）式とおけることを証明する。

固有振動方程式 $(K - \lambda M)y = 0$ に（2）式を代入すると、

$$\left.\begin{aligned} k_{11}\Phi_{11} + k_{12}\Phi_{12} &= \lambda_1 m_1 \Phi_{11} \\ k_{21}\Phi_{11} + k_{22}\Phi_{12} &= \lambda_1 m_2 \Phi_{12} \end{aligned}\right\} \text{モード1について}$$

$$\left.\begin{aligned} k_{11}\Phi_{21} + k_{12}\Phi_{22} &= \lambda_2 m_1 \Phi_{21} \\ k_{21}\Phi_{21} + k_{22}\Phi_{22} &= \lambda_2 m_2 \Phi_{22} \end{aligned}\right\} \text{モード2について}$$

（3）式

復元力　慣性力

また、$y=A_1\times$(1次正規化モード)$+A_2\times$(2次正規化モード)
の変形をさせるための

力も同様に $P=A_1\times$(1次モードの慣性力)$+A_2\times$(2次モードの慣性力)で
表されるものとすれば、

【ポイント】

（2）式で、実変形が表現できることを以下確認してみる。

【解説】

まず（2）式を固有振動方程式に代入してみると（3）式となる。これは、外力がなければ、ばね力と慣性力が釣り合っているとみることができる。また、変形を生じさせる力もモード重ね合わせで表わされるとすると、節点1に作用する力は慣性力の足し合わせとしても良いはずなので、一番下の式とおく。

各節点に働く力は、(4)式に表現できる。

$$\left.\begin{aligned}
P_{S1} &= A_1(\lambda_1 m_1 \Phi_{11}) + A_2(\lambda_2 m_1 \Phi_{21}) && \text{(3)より}\\
&= k_{11}(A_1\Phi_{11}+A_2\Phi_{21}) + K_{12}(A_1\Phi_{12}+A_2\Phi_{22}) && \text{(2)より}\\
&= k_{11} y_1 + k_{12} y_2 \quad (m_1\text{の位置に作用する外力}) &&\\
P_{S2} &= A_1(\lambda_1 m_2 \Phi_{12}) + A_2(\lambda_2 m_2 \Phi_{22}) && \text{(3)より}\\
&= k_{21}(A_1\Phi_{11}+A_2\Phi_{21}) + K_{22}(A_1\Phi_{12}+A_2\Phi_{22}) && \text{(2)より}\\
&= k_{21} y_1 + k_{22} y_2 \quad (m_2\text{の位置に作用する外力}) &&
\end{aligned}\right\}\text{(4)式}$$

つまり、モードの世界の慣性力と実世界のばね力が等価に現されており、(2)式とおくことができる。

【ポイント】

モード世界と実世界での等価な力

【解説】

(3)式より、変形を生じさせる力は、慣性力で表現でき、それは、ばねの復元力で表現できる。また、それは(2)式より実世界のばね力で表現できる。

つまり、(2)式と置くことに矛盾はなく、実世界とモード世界の関係を(2)式としても力の釣り合いは満足されていることが確認できる。

ここで、解きたい2自由度の運動方程式に立ち返ろう。

$$\left.\begin{aligned}
M_1 \ddot{y}_1 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 &= P_1(t) \quad (m_1\text{についての釣り合い式})\\
M_2 \ddot{y}_2 + k_{21} y_1 + k_{22} y_2 &= P_2(t) \quad (m_2\text{についての釣り合い式})
\end{aligned}\right\}\text{(5)式}$$

これは2階の連立微分方程式であり、代入法などの正攻法で行うと4階の微分方程式となり容易でない。更に、自由度が増えるともはや正攻法で解くことは不可能となる。

まず、前出の係数A_1,A_2を一般化係数として$q_1(t)$,$q_2(t)$に置き換えると、

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
y_1(t) &= \Phi_{11} q_1(t) + \Phi_{21} q_2(t)\\
y_2(t) &= \Phi_{12} q_1(t) + \Phi_{22} q_2(t)
\end{aligned}\right\}\text{変位}\\
&\left.\begin{aligned}
\ddot{y}_1(t) &= \Phi_{11} \ddot{q}_1(t) + \Phi_{21} \ddot{q}_2(t)\\
\ddot{y}_2(t) &= \Phi_{12} \ddot{q}_1(t) + \Phi_{22} \ddot{q}_2(t)
\end{aligned}\right\}\text{加速度も}
\end{aligned}\right\}\text{(6)式}$$

【テキストP218参照】

【ポイント】

ここで、解きたい問題の実世界の連立方程式をモード世界に変換してみる。

【解説】

今、実世界の変位量y1,y2を求めようとすると(5)式の連立運動方程式を解くことになる。この式は、1階部分の運動方程式にy2の項が入り、2階部分の運動方程式にy1の項が入り、お互いに連立していることがわかる。これは、当然で、実世界では1階、2階部分がそれぞれ影響し合って振動していることを示している。

そこで、変位および加速度も実世界の変位yは、固有モードの足し合わせで表現できる特徴を利用する。(6)式を実世界の運動方程式に代入してモード世界の式に変換してみる。

(5)式に(6)式,(4)式を代入すれば、

$$\left.\begin{aligned} m_1\Phi_{11}\ddot{q}_1 + m_1\Phi_{21}\ddot{q}_2 + \lambda_1 m_1\Phi_{11}q_1 + \lambda_2 m_1\Phi_{21}q_2 = P_1(t) \\ m_2\Phi_{12}\ddot{q}_1 + m_2\Phi_{22}\ddot{q}_2 + \lambda_1 m_2\Phi_{12}q_1 + \lambda_2 m_2\Phi_{22}q_2 = P_2(t) \end{aligned}\right\} \text{(7)式}$$

上記第1式×Φ_{11}+上記第2式×Φ_{12}より、左辺は

$$\underbrace{(m_1\Phi^2_{11} + m_2\Phi^2_{12})}_{=1}\ddot{q}_1 + \underbrace{(m_1\Phi_{11}\Phi_{21} + m_2\Phi_{12}\Phi_{22})}_{=0}\ddot{q}_2 +$$

$$\lambda_1\underbrace{(m_1\Phi^2_{11} + m_2\Phi^2_{12})}_{=1}q_1 + \lambda_2\underbrace{(m_1\Phi_{11}\Phi_{21} + m_2\Phi_{12}\Phi_{22})}_{=0}q_2$$

結局、正規直交関係より、左辺は $\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1$ になってしまう

従って、 $\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1 = \Phi_{11}P_1(t) + \Phi_{12}P_2(t)$

同様にq_2のみを取り出せば、

$$\ddot{q}_2 + \lambda_2 q_2 = \Phi_{21}P_1(t) + \Phi_{22}P_2(t)$$

（上記2式：(8)式）

【テキストP218～P219参照】

【ポイント】

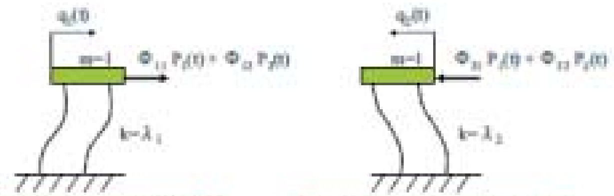
モード世界の特徴を上手く利用して式を整理してみると、１変数のみの微分方程式(運動方程式)となる。

【解説】

一見複雑になるが、モードの特徴(1)式を利用して、整理すると最終的に(8)式となる。これは、モード世界の変位qに対する独立した１自由度の運動方程式に分解されているのがわかる。右辺は、荷重項であり既知である。

7)モード世界での運動方程式

(8)式はq_1、q_2が完全に分離されており、外力P_1、P_2が既知であるので、それぞれ１自由度の運動方程式を解けば、q_1、q_2が求まることになる。
すると、(6)式より現実世界の変位y_1、y_2が直ちに求められる。



分離された１次モードの世界　　分離された２次モードの世界

【テキストP219参照】

【ポイント】

一自由度の振動挙動を求めれば、任意の挙動はその足し合わせで求めることができる。

【解説】

外力P1,P2は入力データであるので、各式は、q1,q2それぞれの非連成の１自由度振動方程式である。これを解くことにより、q1,q2が簡単に求まり、(6)式に再度代入することにより、実世界の変位y1,y2や加速度が求まることになる。100階建ての構造物でも、１自由度の運動方程式を100回解くだけで同じ手法が使えることが分かる。固有値解析の結果を使って、多自由度系の動的応答解析を効率良く行う手法が、モード解析 である。

実世界では、1階部分のみ、2階部分のみを解いて、後で足し合わせるようなことはできない。

8）一般的な動解析手法

■時刻歴応答解析

固有値空間上で、1自由度の運動方程式を解いた後、モード合成法により実時間での時刻歴応答を計算する。荷重項は任意の時刻歴荷重を指定できる。必要な次数までの固有値を計算し、時間刻みはその最小周期の1/4以下にすることが望ましい。減衰は、モーダル減衰、Reyleigh減衰、ダンパー要素が可能。

■周波数応答解析

固有値空間上で、1自由度の運動方程式を解いた後、周波数領域での応答を計算する。そのためには、荷重項も周波数ごとの荷重を指定する。横軸に周波数、縦軸に実応答値位相を出力する。周波数刻みは共振ピーク付近では細かくする必要がある。減衰は、モーダル減衰、Reyleigh減衰が可能。

■ランダム周波数応答解析

周波数領域で、ランダムの荷重を指定できる。ただし、荷重は横軸周波数、縦軸PSD(Power Spectrum Density)で入力する。これは、周波数応答解析をした後にPSDにより統計的なばらつき(0～+1.0)を指定する。結果も統計的な相乗平均(RMS)で出力される。

【テキストP239～P240参照】

【ポイント】

代表的な動解析の種類を示す。

【解説】

スライドの説明通り。

PSDは周波数ごとのエネルギー量（2乗量）を示す。ランダムな荷重に対しては、エネルギーパワー分布としての統計量で扱うという考えである。

■応答スペクトル解析

多自由度系の最大応答値を計算する手法である。まず入力荷重を周波数ごとのスペクトル関数に変換し、1自由度系に分解した各固有周波数ごとの振動系に作用させ各最大応答値を計算する。出力は各自由度ごとの最大応答値が出力され、横軸節点、縦軸最大値となる。

■時刻歴応答解析（直接積分法）

各瞬間ごとの運動方程式を時間軸のまま、初期値より逐次計算していくものである。荷重、減衰値、剛性なども時間軸で変化させることもできる。また、荷重増分的に行っているので、材料非線形、大変形、接触(衝突)なども扱える。但し、数値計算の安定性や最小固有周期などから、一般に時間刻みをかなり小さくしなければならず、計算コストが膨大になる傾向がある。

■複素固有値解析

減衰項を考慮した固有値解析が可能である。減衰効果により固有値が下がり位相遅れが生じる。複素固有値問題となるが、大規模モデルは扱えない。

【テキストP240～P241参照】

【ポイント】

代表的な動解析の種類

【解説】

スライドの説明通り。

応答スペクトルは、モード分離された1自由度系に入力荷重を入れてその最大応答量のみを調べる。それぞれのモードの最大値は、同時に起きることはないので、重み付けして足し合わせる。

直接積分法のみ、モード法による1自由度の重ね合わせを利用していないので、非線形問題や衝撃問題も可能である。これは、実時間の運動方程式のまま時々刻々計算を進めるものである。

複素固有値解析は、一般の固有値解析と同じであるが、振幅と位相の情報が必要なので複素変数を扱うことになる。

２－４　振動解析を効果的に行うための注意点とそのノウハウ

1) 単位系：質量密度、重量密度、自重時の反力チェック

2) 境界条件：完全固定、すべり支持、ピン支持、ばね支持、フリー、強制変位

3) 荷重条件：変位、速度、加速度、力、荷重履歴のグラフ化

4) 減衰条件：正確な減衰値は測定値、実験モード減衰値、減衰比、減衰係数

5) メッシュ分割：各モードパターンに合わせたメッシュサイズ

6) 各種解析手法の精度確保

固有値解析：外力荷重の考慮

モーダル周波数応答解析：考慮するモード数、ステップ幅、減衰タイプ

モーダル時刻歴応答解析：考慮するモード数、時間ステップサイズ、減衰タイプ

7) 結果考察、実験と比較：モードの相関、境界条件、メッシュ、静解析でのチェック

8) コンピュータ利用：計算時間、必要メモリ容量、検討物理時間

【テキストP242～P244参照】

【ポイント】

振動解析を行う際の注意点やノウハウを示す。

【解説】（テキストの文章を参照のこと）

1) 単位系

材料の重さが必要になる。その際、重量密度で入力するのか質量密度で入力するのか。自重を与えて支持点の反力を見てみるとよい。

2) 境界条件

自分自身と同程度の剛性の支持台であれば、完全固定よりはばね支持とすべきである。また、単に床に置かれている構造物の場合も、完全固定よりもピン支持かすべり面支持の方がより妥当である。

3) 荷重条件

自分が入力した荷重をグラフで出力し、確認しておくことが重要である。

4) 減衰条件

正確な減衰値は実測結果からしか求まらない。共振位置やレベルを比較するのはよいが、共振点ピークを正確に求めたい場合などは、より正確な減衰値を求める必要がある。減衰比と減衰係数に注意する。

5) メッシュ分割

メッシュは、各モードパターンが正確に表現できるために十分細かくする必要がある。高周波モードまで考慮するとなると、モードパターンが複雑になるためより細かいメッシュが必要になってくる。

6) 各種数値解析手法と精度

・固有値解析

、外力荷重・自重・熱応力などを考慮して固有値解析を行わないと、実験と合わない場合もある。

・モーダル周波数応答解析

検討する周波数範囲以上の振動モードは必要である。周波数刻みは共振ピーク付近では特に細かくする。

・モーダル時刻歴応答解析

入力波形に含まれる最高振動数以上の振動モードが必要である。時間刻み幅であるが、これは採用した最高次のモード周期の1/4以下の細かさは必要である。また、入力波形を表現できるサンプリング間隔も必要である。

7) 結果考察と実験との比較

モード形状自体が異なる場合は、拘束条件、結合条件、モデル化範囲を確認する。高次モードが異なる場合は、メッシュ分割を細かくしてみる。固有振動数が異なる場合は、材料物性値、質量の有無等を確認する。

8) コンピュータ資源、その他

振動解析では、特に計算時間やメモリー、ハードディスクなどのコンピュータ資源を多く使用するので注意する。

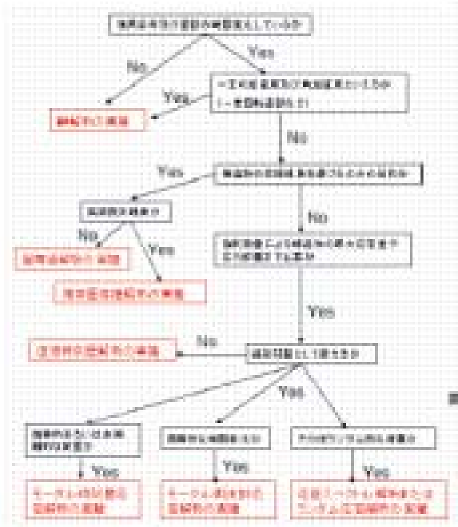


図4-2-20　振動解析のステップ

【テキストP241参照】

【ポイント】

有限要素法により振動解析を検討する際のステップを示す。

【解説】

求めたい現象により解析タイプを選択しなければならない。そのためには、振動現象自体の理解と振動解析の知識が必要になる。前出の解析種類を理解し、ヘルプやユーザーマニュアルで確認することが必要である。

ポイント1) 静解析と近似することが可能か。

ポイント2) 固有振動数とそのモードが分かれば、対策がたてられるのか。

ポイント3) 線形問題として扱えるのか。

ポイント4) 荷重タイプは、周期的、時刻歴、衝撃的、ランダムか。

第3節　振動解析の事例

学習のポイント
　産業界での振動解析事例を紹介する。

【本節のポイント】
　産業界での事例を通じて、振動解析を理解する。

【本節の解説】
　振動解析の事例を紹介する。

振動解析事例

1）

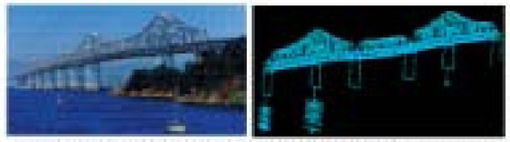


図4-3-1 サンフランシスコ　オークランドベイ橋の地震応答解析
[illegible]

2）

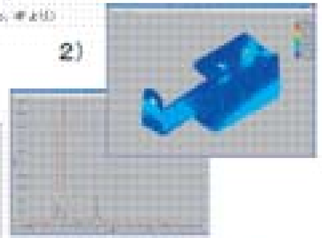


図4-3-2 振動機のセンサー取り付け ブラケットの周波数応答解析

3）

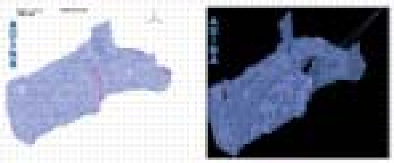


図4-3-3 ダイキャスト製品の固有振動解析
[illegible]

【テキストP245～P246参照】

【ポイント】
　産業界での振動解析例を紹介する。

【解説】
1）鉄橋の地震応答解析
米フランシスコに掛かる鉄橋の地震応答解析を行った事例である。今までに、何度も地震により、橋脚や床板が外れる被害が出ている。過去の地震波形を外力として入力し、それぞれの箇所に生じる変位・加速度・力などを算出し対策を講じている

2）板金ブラケットの周波数応答解析
振動機上に取り付けられた板金ブラケットの周波数応答解析を行った事例である。このブラケットには機器やセンサー類が取り付くため、ブラケット自身の共振を極力抑える必要がある。かといって、過剰に強度を上げると重量が重くなってしまう。軽量化しながらも振動応答量を抑えるための検討が行なわれる。

3）鋳造品の大規模固有振動解析
アルミダイキャスト製品の固有振動解析を実施した例である。図4-3-3にメッシュ図とモード図を示す。1次周波数が20Hz程度であり、薄肉化しかつ大きな穴を開けた部分の剛性がかなり低いことが確認できる。本解析モデルは120万自由度以上の大規模モデルであるが、ランチョス法により解析が可能となっている。

振動解析事例

4）

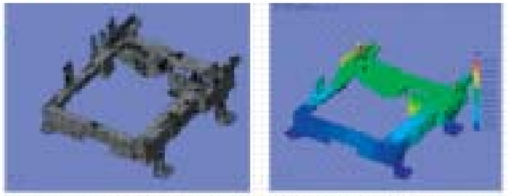


図4-3-4 モータドライブ取り付けブラケットの固有振動解析

5）

図4-3-5 携帯電話の落下衝撃解析

【テキストP246～P247参照】

【ポイント】

産業界での振動解析例を紹介する。

【解説】

4) 樹脂製品の固有振動解析

ビデオ製品内で使用される射出樹脂製品の固有振動解析例である。図4-3-4にメッシュ図とモード図を示す。本部品には、駆動用モーターなどが取り付けられており、本製品の共振が直接、製品筐体の振動や騒音性能に影響する。モーターの可動周波数内に共振点を持たないように、リブの配置や板厚を設計する。

5) 携帯電話の落下衝撃解析

携帯電話を始め、モバイル電子機器の普及が急速に進んでいる。それに従って、使用中に誤って落としてしまうことも少なくない。その際、通常の落下条件であれば、筐体の割れや機能障害などはメーカーが保証しなければならない。そのような場合は、衝撃的な荷重を想定して振動解析を行い、表面および内部電子部品の加速度や力を見積る必要がある。

第4節　振動解析の実際

学習のポイント
　実際にCAEシステムを使用して、FEMによる振動解析手順を習得し、モデル化の違いによる解析結果への影響等その留意点やノウハウについて学習する。

【節全体のポイント】

・CAEシステムを使った固有振動解析の手順を習得する。

・FEMにおけるモデル化の違いによる解析結果への影響を理解する。

・FEM(有限要素法)の特徴と留意点、ノウハウを理解する。

【節全体の解説】

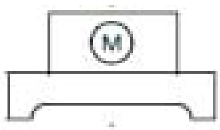
この節では実際にCAEシステムを使った固有振動解析を行い手順を習得する。またその中で、CAEソフトに広く使われている有限要素法の特徴と留意点、ノウハウについて理解し、解析結果を考察し設計目標を満足させるための改善を行う際の考え方を理解する。

4-4-1　演習例題

ここでは実際にCAEシステムを使用し、演習例題により FEMによる解析手順を習得する。

ある回転機械の架台に対して、必要な強度・剛性を確保すると同時に、モータによる振動外力の周期と共振しないよう設計目標を1次固有振動数200Hz以上として、FEM解析により設計検討を行う。

設計目標：
1次固有振動数200[Hz]以上
質量200[kg]以下　とする。



【テキストP248参照】

【ポイント】

CAEシステムを使用しFEMによる解析を行う際には、まずその目的と評価基準(設計目標)を明確にしておく必要がある。

【解説】

ここでは実際にCAEシステムを使用し、演習例題としてある回転機械の架台に対して、必要な強度・剛性を確保すると同時に、モータによる振動外力の周期と共振しないよう設計目標を1次固有振動数200Hz以上、質量を200kg以下として、FEM解析により設計検討を行う。

架台（初期仕様）

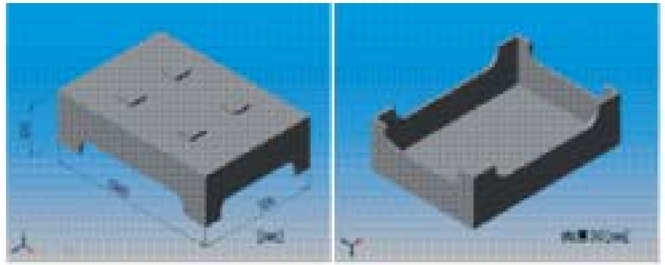


図4-4-1　回転機械の設置用架台（初期仕様）

【テキストP248参照】

【ポイント】

解析対象となる架台の初期仕様を確認する。

【解説】

ここでは、まずはじめに静剛性解析を行い、次に固有振動解析を行うことでその違いを確認する。また、設計変更として補強案の効果や境界条件の違い、メッシュ分割の違いによる解析結果への影響についても考察する。

CAEによる解析手順

形状モデルの作成または読み込み
材料特性の入力（ヤング率、ポアソン比等）
要素特性の入力（要素タイプ、サイズ）
メッシュ分割
境界条件（荷重、拘束条件）の設定

⇩

計算実行（静剛性解析、固有値解析等）
エラー検出

⇩

結果の出力
（変形図、応力コンタ図、固有振動モード図等）

プリプロセッサ部

ソルバー部

ポストプロセッサ部

【テキストP249参照】

【ポイント】

最初にCAEによる解析の大まかな流れを理解する。

【解説】

CAEによる解析の流れは、大まかに言って、プリプロセッサ部、ソルバー部、ポストプロセッサ部と呼ばれる3つの部分を順に進めていく。

まず、プリプロセッサ部は、解析のためのデータを準備するところで、形状および材料特性、要素特性、荷重・拘束などの境界条件を設定し、メッシュ分割を行い計算を流すためのデータを作成するところである。

次にソルバー部でそのデータを計算実行させる。もしデータ等に不備があればエラーとして検出され再確認を行うことになる。問題がなければ正常に計算が終了する。

ポストプロセッサ部は、計算した結果をわかりやすく表示させるための操作を行うところである。応力や変形図、振動モード図等をコンタ図で色分けしてわかりやすく表現することができる。

4-4-2　静剛性解析

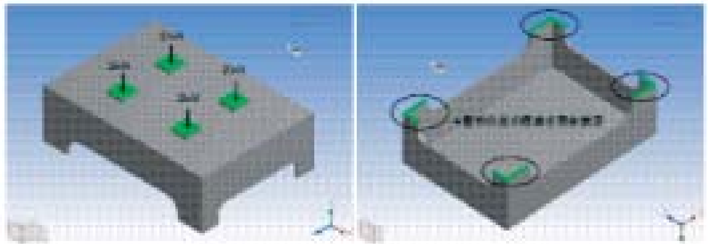


図4-4-2　静剛性解析の境界条件

【テキストP249参照】

【ポイント】

まず設置する機械の重量を負荷荷重とした静剛性解析の手順を習得する。

【解説】

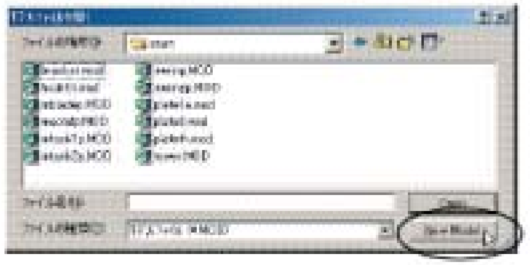
解析ソフトとしてここではMSC/Nastran for Winsows 2003r2を用いた。形状モデルはSolidWorksなどの3次元CADで作成したモデルをACISやParasolidなどのソリッドカーネルデータ形式で読み込むことができる。

拘束条件として架台の4箇所の足を固定し、荷重条件として機械の重量8kNを4箇所の据付部に均等に負荷する。

CAEシステムの起動

実際にCAEシステムを使って解析してみましょう。

テキストP.250～266の手順に従って操作してください。



【テキストP.250参照】

【ポイント】

CAEシステムを起動し、新しいファイルを開く。

【解説】

まず、解析ソフトMSC/Nastran for Windowsを起動する。

ここからは、テキストP.250～266の手順に従って、講師が実際にプロジェクター等で手順をやって見せながら、受講者自身がそれに習って架台の静剛性解析の操作を実行してみる。

形状モデルの読み込み

3次元CADで作成した形状モデルを読み込む

【テキストP.250参照】

【ポイント】

3次元CADで作成した形状モデルの読み込み方法を習得する。

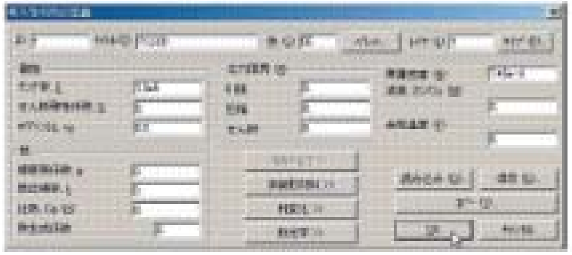
【解説】

あらかじめ3次元CADで作成した形状モデルをACISやParasolid等のソリッドカーネルデータ形式で保存しておく必要がある。

読み込んだ時のスケールが正しいかどうかモデルの寸法を確認しておく。

材料特性データの定義

解析に必要な材料特性（ヤング率、ポアソン比、質量密度）を入力する。



【テキストP250参照】

【ポイント】

解析に必要な材料特性を入力する。

【解説】

材料物性値のヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数のうち、2つだけ入力すればよい。通常はヤング率、ポアソン比の2つの入力がよく使われる。

質量密度は自重や慣性力を考慮しないならば静的解析では不要であるが、振動解析では必須である。

重力単位系かSI単位系のどちらかに単位系を揃えることに注意する。

質量密度は　単位体積あたりの重量（重量密度）÷重力加速度　の値を入力する。

質量密度：　$7.6\times10^{-6}/9800\ [kgf\cdot s^2/mm^4] = 7.45\times10^{-9}\ [N\cdot s^2/mm^4]$

要素特性データの定義

解析に使用する要素特性データを選択入力する

【テキストP253参照】

【ポイント】

解析に使用する有限要素の要素特性を入力する。

【解説】

要素タイプには線要素、面要素、立体要素などが選べるが、ここでは立体要素のソリッドを選択する。

メッシュ分割の定義

自動メッシュサイズ定義の入力

【テキストP255参照】

【ポイント】

自動メッシュ分割のメッシュサイズを入力する。

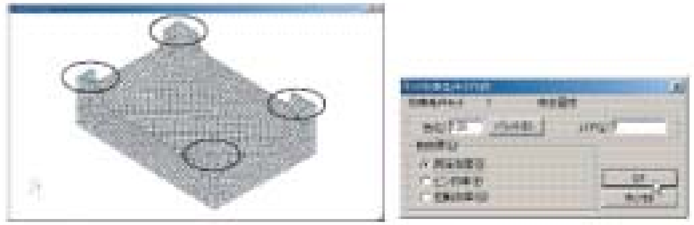
【解説】

自動メッシュサイズ定義ダイアログの中で、要素サイズは自動で適当な値が入力されているが、自分で適切なメッシュサイズを入力することができる。その他はディフォルト値を特に変更する必要はない。

ソリッドのテトラメッシュを使う場合は、節点数は増えるが精度を重視して中間節点のチェックボックスを「オン」にする方がよい。

境界条件（拘束条件）の定義

架台底面の拘束を定義する。



【テキストP259参照】

【ポイント】

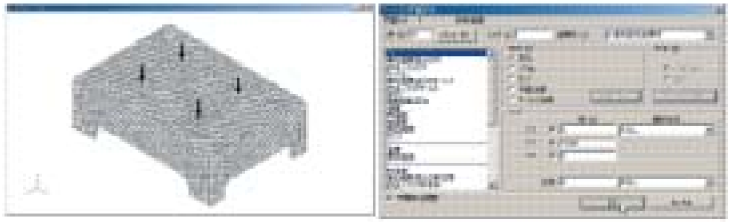
解析モデルの拘束条件を定義する。

【解説】

モデルの拘束条件には、完全拘束、ピン拘束、回転拘束などが選べるが、ここでは完全拘束を定義する。実際には底面は摩擦を生じながら動くことも考えられるため、実物の固定状態をよく観察して条件を設定する必要がある。

境界条件（荷重条件）の定義

荷重条件を定義する。



【テキストP261参照】

【ポイント】

解析モデルの荷重条件を定義する。

【解説】

荷重条件として、設置する機械の重量を4箇所の据付面に分散して定義する。特に材料物性値と荷重値の単位を揃えることや荷重方向の＋－の符号に注意する必要がある。

境界条件（荷重条件）の定義

自重を考慮した荷重条件を定義する。

【テキストP261参照】

【ポイント】

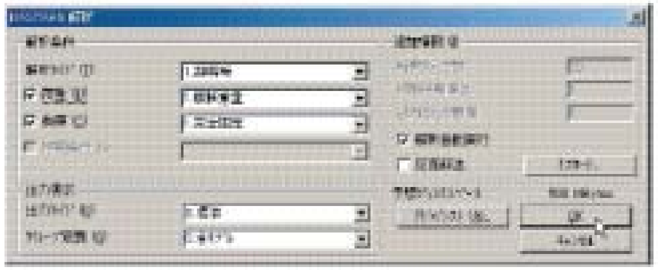
自重を考慮した荷重条件を定義する。

【解説】

荷重条件として自重を考慮する場合、要素荷重の作成ダイアログで加速度の有効チェックボックスを「オン」にし、重力加速度の値9800[mm／s²]を入力する。このとき加速度の方向として座標軸に対する＋－の符号に注意する。

解析実行

解析条件が設定できたら、解析を実行する。



【テキストP263参照】

【ポイント】

解析条件が設定できたら、データを保存した後、解析を実行する。

【解説】

解析を実行する前にデータを指定のディレクトリに保存しておく。

ここでは解析のタイプに静解析を選択し、先に設定した拘束条件と荷重条件を選択し、解析を実行する。

解析終了時に「フェイタルエラー」の表示が出なければ正常終了であるが、もし「フェイタルエラー」が表示された場合は、どこに原因があるのかを探して修正し、解析を再実行させる必要がある。

結果出力-1

解析結果をわかりやすく表示させる。

【テキストP263参照】

【ポイント】

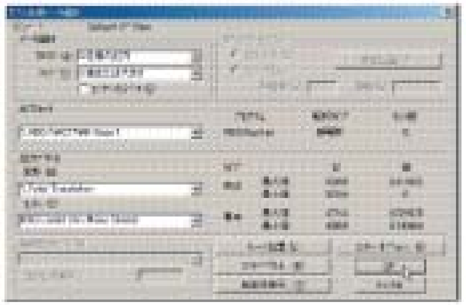
解析結果をわかりやすく表示させるためのポスト処理を実行する。

【解説】

解析が正常に終了したら、結果を表示させる。ビュー選択ダイアログで表示させたい項目を選択する。ここでは、「モデルスタイル」に全隠線表示、「変形スタイル」に変形、「コンタースタイル」にコンターを選択する。

結果出力-2

結果の出力セットと出力ベクトルを選択する。



【テキストP263参照】

【ポイント】

表示させたい結果の出力セットと出力ベクトルを選択する。

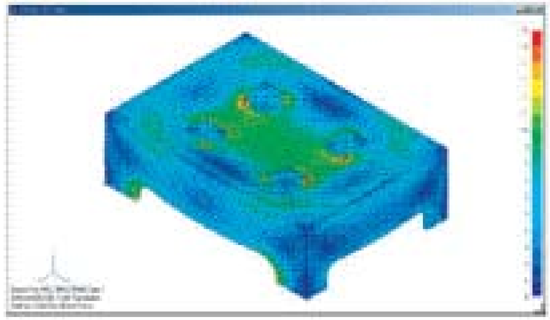
【解説】

解析結果として表示させたい出力セットと出力ベクトルを選択する。ここでは、「変形」にTotal Translation（全体変形）、「コンター」にVon Mises Stress（ミーゼス応力）を選択する。

出力セットには何回か解析実行させた場合はその回数分だけ出力セットが残るので、どれを出力するのか出力セットの選択ボックスで選ぶ必要があるので注意を要する。

結果出力-3

変形図と応力コンタ図を表示する。



【テキストP265参照】

【ポイント】

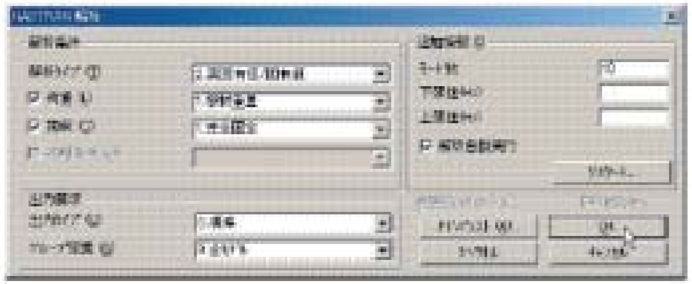
変形図と応力コンタ図を表示する。

【解説】

解析結果としてモデルの変形状態と応力分布をコンタ図で表示することにより、結果を視覚的にわかりやすくすることができる。

ポスト処理のオプションを選択すると、表示色やレベル、変形倍率などを変更することができる。

4-4-3 固有振動解析



【テキストP267参照】

【ポイント】

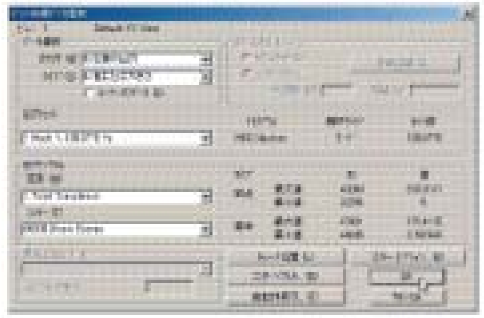
静剛性解析のモデルを使い固有振動解析を実行する。

【解説】

解析モデルの作成は4-4-2で行った(1)～(6)の手順と同様である。(7)の解析実行のところで解析タイプに「実固有値／固有値」を選択し、モード数のところに出力したいモード数を入力する。拘束なしのフリーフリー解析を行う場合はモード1～6までは剛体モードが出力されるので、モード数7以上を入力する必要がある。

結果出力-1

結果の出力セットと出力ベクトルを選択する。



【テキストP270参照】

【ポイント】

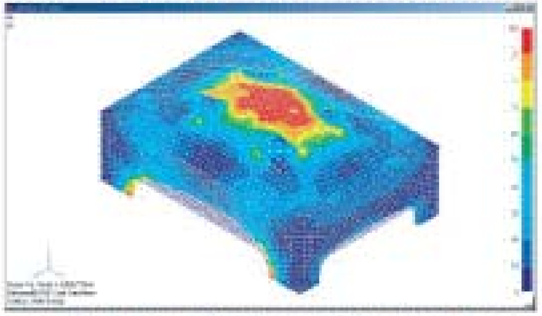
結果の出力セットと出力ベクトルを選択する。

【解説】

解析結果として表示させたい出力セットと出力ベクトルを選択する。出力セットには表示させたいモードを選択する。出力ベクトルはここでは「変形」にTotal Translation(全体変形)、「コンター」にStrain Energy(ひずみエネルギー)を選択する。

結果出力-2

変形モード図とひずみエネルギーコンタ図を表示する。



初期仕様における振動モード及びひずみエネルギ(Mode1 138.7[Hz] 質量214[kg])

【テキストP270参照】

【ポイント】

変形モード図とひずみエネルギーコンタ図を表示する。

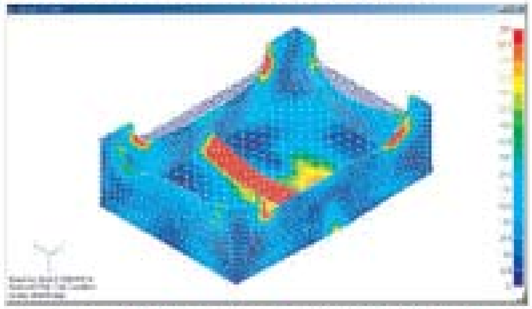
【解説】

解析結果としてモデルの振動モード図とひずみエネルギー分布をコンタ図で表示することにより、結果を視覚的にわかりやすくすることができる。ただし、ひずみエネルギーの数値自体は相対値であり評価対象にはならない。

また、変形をアニメーション表示させると、振動モードがよりわかりやすくなる。

改善検討

補強リブの追加(横方向)による効果を見る。



改善案1における振動モード及びひずみエネルギ(mode1 240.0[Hz] 質量224[kg])

【テキストP272参照】

【ポイント】

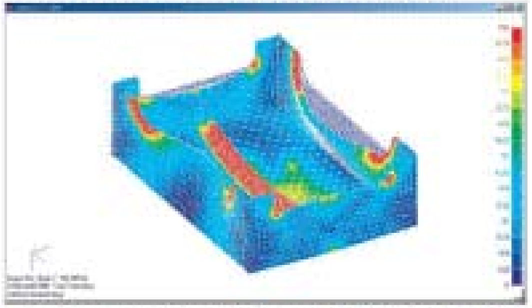
補強リブ(横方向)の追加による効果を見る。

【解説】

初期仕様では設計目標の1次固有振動数200Hz以上を満足していないため、補強リブを横方向に追加し、その効果を解析により検証する。すると、1次固有振動数は240Hzとなり、設計目標を満足することができる。

考察

補強リブの追加（縦方向）による効果を見る。



改善案2における振動モード及びひずみエネルギ（Mode1 192.5[Hz]　質量229[kg]）

【テキストP273参照】

【ポイント】

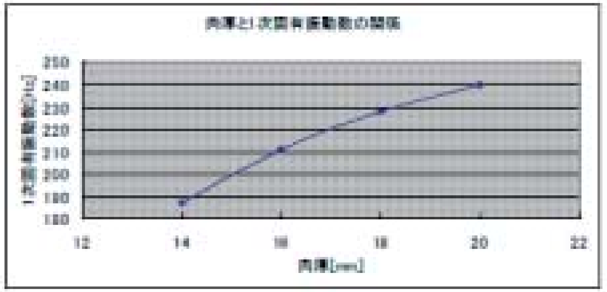
補強リブ(縦方向)の追加による効果を見る。

【解説】

改善案1で設計目標の1次固有振動数200Hz以上を満足することができたが、考察として補強リブを縦方向に追加した場合の効果を解析により検証する。すると、1次固有振動数は192.5Hzとなり、設計目標を満足することができず補強リブの方向として効果的でないことがわかる。

軽量化検討

肉厚減少による軽量化を検討する。



架台の肉厚と1次固有振動数の関係

【テキストP275参照】

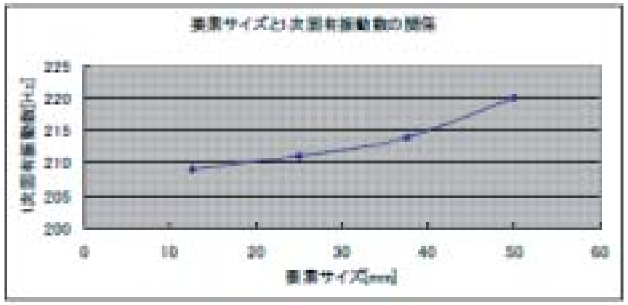
【ポイント】

架台の肉厚減少による軽量化を検討する。

【解説】

改善案1で1次固有振動数は240Hzとなり、設計目標の200Hz以上を満足することができたが、質量が224kgとなり設計目標の200kg以下を満足していない。そのため、ここでは肉厚を変化させて軽量化を検討する。結果のグラフから肉厚16mmにすれば固有振動数211Hz、質量185kgとなり、ともに設計目標を満足できることがわかる。

4-4-4 考察（要素サイズの影響）



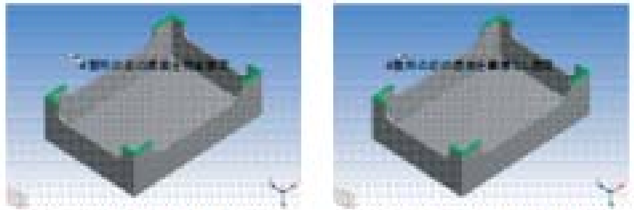
架台モデルの要素サイズと1次固有振動数の関係

【テキストP276参照】

【ポイント】
要素サイズの違いによる解析結果への影響を考察する。

【解説】
有限要素法の特徴の1つであるメッシュサイズにより結果が異なってくる点について、どの程度影響するのか検証を行う。グラフより要素サイズと1次固有振動数は要素サイズが大きくなるほど高めに出力されることがわかる。したがって、精度よく解析するためには、ある程度のメッシュの細かさが必要であることがわかる。特に比較評価を行う場合は、メッシュの大きさを揃えることに注意する必要がある。

考察（拘束条件の違いによる影響）



モデル1（4箇所の足を完全固定）　モデル2（4箇所の足を摩擦なし固定）

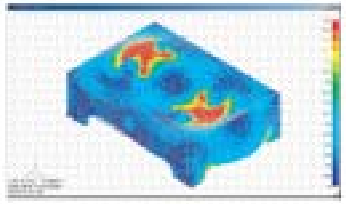
拘束条件（モデル1およびモデル2）

【テキストP277参照】

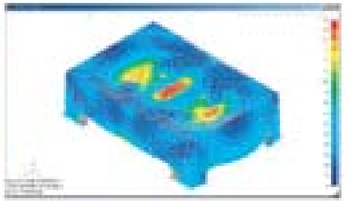
【ポイント】
拘束条件の違いによる解析結果への影響を考察する。

【解説】
拘束条件として架台の4箇所の足を完全固定にした場合と、摩擦なしの固定（上下方向のみ拘束）にした場合とで、解析結果がどのように違うかを検証する。

考察（拘束条件の違いによる影響）



モデル1(完全固定)の解析結果(Mode1 210.9[Hz])



モデル2(摩擦なし固定)の解析結果(Mode1 201.8[Hz])

【テキストP278参照】

【ポイント】

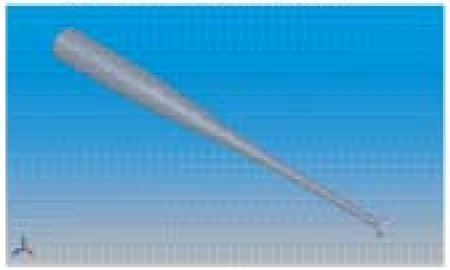
拘束条件の違いによる解析結果への影響を考察する。

【解説】

摩擦なしの固定条件のほうは1次固有振動数が201.8Hzとなり、完全固定での値210.9Hzよりも低い値となることがわかる。このように拘束条件によっても結果が異なるため、モデルの実際の固定状態をよく観察し、適切な拘束条件で解析評価を行う必要がある。

4-4-5　金属バットモデルの解析

材質：　アルミ合金（A7000系）
ヤング率：　E = 72000 [MPa]
ポアソン比：　ν = 0.33
質量密度：　$\rho = 2.7\times10^{-6}$ [kg/mm³]



【テキストP279参照】

【ポイント】

前章の実験モード解析で用いた金属バットについてFEMによる固有振動解析を行い結果を考察する。

【解説】

バットの形状モデルを3次元CADで作成し、あらかじめ3次元CAD中間ファイルの1つであるSATファイル形式等で保存準備しておくこと。

3次元CADで作成したモデルを用い、拘束なしのフリーフリー解析を行う。

前節4-4-3で行った解析手順を参考にし、各自で解析を実行してもらう。

金属バットモデルの解析

金属バットのFEM解析モデル(シェル要素)

金属バットのFEM解析モデル(ソリッド要素)

【テキストP280参照】

【ポイント】

金属バットの解析について、シェルモデルとソリッドモデルの両方で解析し、結果を考察する。

【解説】

シェル要素モデルはバットの板厚中心でモデル化している。ソリッド要素モデルはオートメッシュのため、多少メッシュ分割の対称性が悪くなっている。

金属バットモデルの解析結果

モードNo.	固有振動数[Hz](シェルモデル)	固有振動数[Hz](ソリッドモデル)	実験値[Hz]	振動モード
Mode1	-5.39×10^{-4}	-1.23×10^{-4}	－	剛体モード
Mode2	-1.70×10^{-4}	-1.86×10^{-4}	－	剛体モード
Mode3	-2.33×10^{-4}	-1.29×10^{-4}	－	剛体モード
Mode4	2.20×10^{-4}	-6.84×10^{-4}	－	剛体モード
Mode5	6.12×10^{-4}	7.60×10^{-4}	－	剛体モード
Mode6	8.56×10^{-4}	1.90×10^{-4}	－	剛体モード
Mode7	220.1	232.3	212	1次曲げ
Mode8	222.1	234.5	212	1次曲げ
Mode9	733.7	730.1	684	2次曲げ
Mode10	735.7	736.7	684	2次曲げ
Mode11	1404.8	1421.6	1340	3次曲げ
Mode12	1404.8	1444.2	1340	3次曲げ
Mode13	1971.8	1776.6	－	バット大径部の振動
Mode14	1972.8	1901.2	－	バット大径部の振動
Mode15	1986.1	1935.5	－	バット小径部の振動
Mode16	2276.4	2288.3	2230	4次曲げ
Mode17	2276.3	2294.4	2230	4次曲げ

【テキストP281参照】

【ポイント】

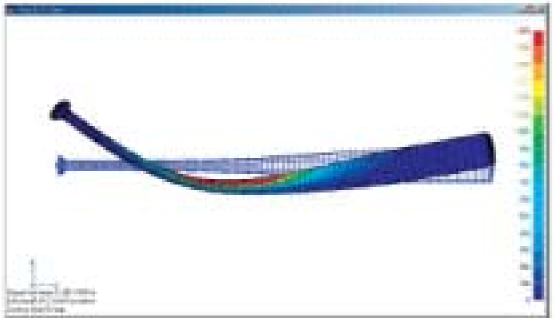
シェルモデルとソリッドモデルによる解析結果を比較考察する。

【解説】

解析特有の現象として、Mode1～6は拘束なしのフリーフリー解析を行ったため、対象物全体が動く剛体モードが出力されるが、これらは評価対象にはならない。また、バットの軸に対して軸対称モデルのため、曲げモードはほぼ同じ振動数で2つ出力される。また、Mode13～15に見られるように、実験では出てこない局部的な振動やねじり振動などが計算では得られる。

シェルモデルとソリッドモデルでは、高次のモードになるほど振動数の差が大きく、またソリッドモデルは要素の対称性も悪いため、同じ曲げモードの振動数の差が大きい。

金属バットモデルの解析結果



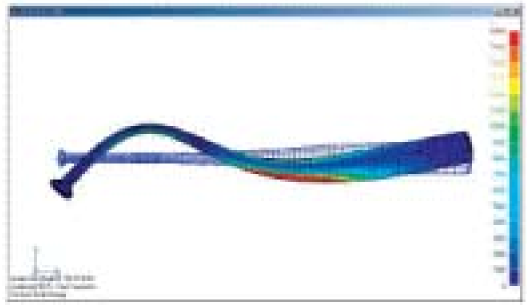
シェル要素による解析結果（mode7　232.1[Hz]）

【テキストP282参照】

【ポイント】
シェル要素による1次曲げモード図(Mode7)

【解説】
シェル要素による解析結果の1次曲げモード(Mode7)の振動モードとひずみエネルギによるコンタ図である。Mode8も同様の振動モードとなる。ただし、出力ベクトルの大きさは相対変位であり、数値の絶対値は評価対象にはならない。ソリッドモデルについても同様の振動モード図となる。

金属バットモデルの解析結果



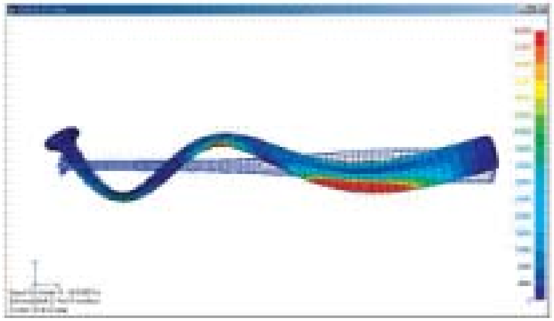
シェル要素による解析結果（mode9　733.7[Hz]）

【テキストP282参照】

【ポイント】
シェル要素による2次曲げモード図(Mode9)

【解説】
シェル要素による解析結果の2次曲げモード(Mode9)の振動モードとひずみエネルギによるコンタ図である。Mode10も同様のモードとなる。グリップエンド部が大きく見えるのは断面が縦に楕円状に変形しているためである。
ソリッドモデルについても同様の振動モード図となる。

金属バットモデルの解析結果



シェル要素による解析結果（mode11　1434.6[Hz]）

【テキストP284参照】

【ポイント】

シェル要素による3次曲げモード図(Mode11)

【解説】

シェル要素による解析結果の3次曲げモード(Mode11)の振動モードとひずみエネルギによるコンタ図である。Mode12も同様である。グリップエンド部が大きく見えるのは断面が縦に楕円状に変形しているためである。

ソリッドモデルについても同様の振動モード図となる。

金属バットモデルの解析結果

シェル要素による解析結果（mode13　1971.9[Hz]）

【テキストP285参照】

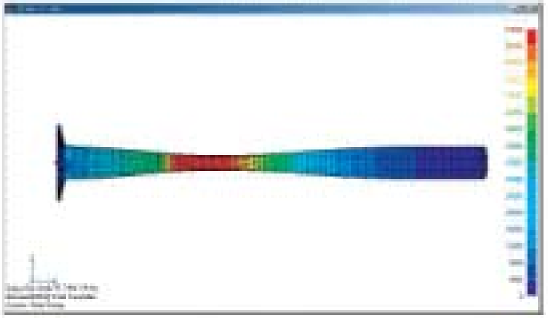
【ポイント】

シェル要素によるバット大径部の膜振動モード図(Mode13)

【解説】

シェル要素によるバット大径部の膜振動モード(Mode13)の振動モードとひずみエネルギによるコンタ図である。Mode14も同様のモードである。ソリッドモデルについても同様の振動モード図となる。

金属バットモデルの解析結果



シェル要素による解析結果(mode15 1984.1[Hz])

【テキストP286参照】

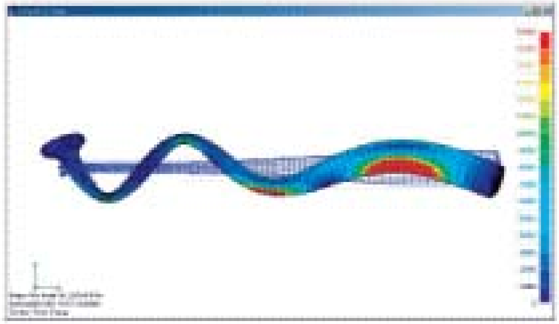
【ポイント】

シェル要素によるバット小径部のねじり振動モード図(Mode15)

【解説】

シェル要素によるバット小径部のねじり振動モード(Mode15)の振動モードとひずみエネルギによるコンタ図である。ソリッドモデルについても同様の振動モード図となる。

金属バットモデルの解析結果



シェル要素による解析結果(mode16 2278.4[Hz])

【テキストP287参照】

【ポイント】

シェル要素による4次曲げ振動モード図(Mode16)

【解説】

シェル要素による4次曲げ振動モード(Mode16)の振動モードとひずみエネルギによるコンタ図である。Mode17も同様のモードである。グリップエンド部が大きく見えるのは断面が縦に楕円状に変形しているためである。

ソリッドモデルについても同様の振動モード図となる。

4-4-6 考察

メッシュ分割を細かくしたモデルの解析結果比較（平均メッシュサイズ[illegible][mm]）

モードNo.	シェルモデル[Hz]	ソリッドモデル[Hz]	振動モード
Mode1	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode2	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode3	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode4	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode5	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode6	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode7	[illegible]	[illegible]	1次曲げ
Mode8	[illegible]	[illegible]	1次曲げ
Mode9	[illegible]	[illegible]	2次曲げ
Mode10	[illegible]	[illegible]	2次曲げ
Mode11	[illegible]	[illegible]	3次曲げ
Mode12	[illegible]	[illegible]	3次曲げ
Mode13	—	[illegible]	バット小径部のねじり
	[illegible]	—	バット大径部の[illegible]
Mode14	[illegible]	[illegible]	バット大径部の[illegible]
Mode15	—	[illegible]	バット大径部の[illegible]
	[illegible]	—	バット小径部のねじり
Mode16	[illegible]	[illegible]	4次曲げ
Mode17	[illegible]	[illegible]	4次曲げ

【テキストP.[illegible]参照】

【ポイント】

前項で解析したモデルに対し、メッシュ分割をさらに細かくしたモデルで解析を行い、結果を考察する。

【解説】

前節の表4-4-1の解析結果と比較すると、シェルモデルとソリッドモデルの振動数の差、あるいはソリッドモデルにおける同じモードでの振動数のばらつきは小さくなったが、バット小径部のねじり振動モードの振動数の差が大きくなっている。これは主にメッシュ形状の違いによるところが大きいと考えられる。このようにFEM解析はメッシュ分割の大きさや分割形状の違いにより、結果が微妙に異なることがわかる。

考察

バットの板厚一定モデルと板厚変化を反映したモデルでの解析結果

モードNo.	板厚一定(2.6)モデル[Hz]	板厚変化反映モデル [Hz]	振動モード
Mode1	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode2	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode3	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode4	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode5	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode6	[illegible]	[illegible]	剛体モード
Mode7	[illegible]	[illegible]	1次曲げ
Mode8	[illegible]	[illegible]	1次曲げ
Mode9	[illegible]	[illegible]	2次曲げ
Mode10	[illegible]	[illegible]	2次曲げ
Mode11	[illegible]	[illegible]	3次曲げ
Mode12	[illegible]	[illegible]	3次曲げ
Mode13	[illegible]	[illegible]	バット小径部のねじり
Mode14	[illegible]	[illegible]	バット大径部の[illegible]
Mode15	[illegible]	[illegible]	バット大径部の[illegible]
Mode16	[illegible]	[illegible]	4次曲げ
Mode17	[illegible]	[illegible]	4次曲げ

【テキストP.[illegible]参照】

【ポイント】

バットの板厚を忠実に再現したモデルと一定（2.6mm）としたモデルでの解析結果を比較した。

【解説】

前節の解析はバットの板厚を2.6mmで一定としたモデルで解析を行ったが、実際のバットは板厚が微妙に変化しており、それを忠実に再現したモデルと板厚で解析結果を比較した。その結果、板厚変化を反映したモデルでは板厚一定モデルよりも若干高めになっているが、振動モードには大きな変化は見られない。また特に高次の局所的な振動モードの振動数の差が大きくなっている。これは主にメッシュ形状の違いによるところが大きいと考えられる。

まとめ

・解析においては、モデル化や解析条件にさまざまな誤差要因が含まれるため、解析結果と実験結果を十分に考察する必要がある。

・解析結果と実験結果を合わせるために色々とモデル化の条件や物性値などを変更し、整合取りを行う努力も必要である。

・このようなノウハウを蓄積していくことが、解析技術を確立し次の解析に活かして行くためには重要なことである。

【テキストP290参照】

【ポイント】

CAEを活用する上での留意点のまとめ

【解説】

FEM解析における固有振動解析は、モデル化や解析条件にさまざまな誤差要因が含まれるため、解析結果と実験結果を十分に考察する必要がある。

解析結果と実験結果を合わせるために色々とモデル化の条件や物性値などを変更し、整合取りを行う努力も必要である。

このようなノウハウを蓄積していくことが、解析技術を確立し次の解析に活かして行くためには重要なことである。