第１章　振動の基礎

第1章　振動の基礎

学習のねらい
　機械振動の基礎理論、振動現象の基礎事項、多自由度系の振動特性、および振動測定法の基礎を習得する。

第1－1節　導入
第1－2節　1自由度系
第1－3節　2自由度系
第1－4節　モデル化と運動方程式
第1－5節　フーリエ変換
第1－6節　振動現象の測定

【章全体のねらい】
　実験・理論モード解析への導入として、機械振動の基礎理論、振動現象の基礎事項、多自由度系の振動特性、および振動測定法の基礎を学習させる。

【章全体の解説】
　実験モード解析および理論モード解析への導入として、下記の項目について学習させる。
　(1) 導入として、機械振動の計測と解析を学習する背景や必要性を認識させ、機械振動の基礎理論として調和振動について説明する。
　(2) 1自由度系の自由振動について固有振動数の求め方と減衰による振動特性を、さらに強制振動について共振現象、振動伝達、および周波数応答関数を理解させる。
　(3) モード解析への導入として、2自由度系について連成と固有モードを説明する。
　(4) 目的に応じて問題の本質を失わない程度の簡単化を行うための振動解析対象のモデル化手法を説明する。
　(5) 周波数領域における解析への導入として、フーリエ変換の概念を理解させる。
　(6) インパルス応答および周波数応答の実験を行い、振動の測定法の基礎および基本的な振動現象を理解させる。

第1－1節　導入

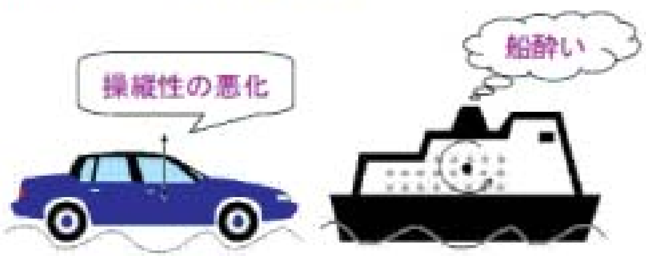
学習のポイント
　機械振動の計測と解析を学習する必要性を理解し、機械振動の基礎理論として調和振動について学ぶ。

1－1－1　機械と振動
1－1－2　調和振動
1－1－3　振動のからくり
1－1－4　機械の力学モデル

【節全体のポイント】
　導入として、機械振動の計測と解析を学習する背景や必要性を認識させ、機械振動の基礎理論として調和振動について説明する。

【節全体の解説】
　(1) 導入として、機械振動はどのような場面で問題になるのかを示し、機械振動の計測と解析を学習する必要性を認識させる。
　(2) 振動の分類として自由振動と強制振動の概念を説明する。
　(3) 機械振動の基礎として、最も基本的な周期運動である調和振動の波形と表示方法について説明する。
　(4) 振動系の基本要素である、慣性要素、復元要素および減衰要素として質量、ばねおよびダンパを示し、機械が振動するためのしくみを理解させる。

1－1－1　機械と振動



悪路を走行中の自動車の振動　　荒波を受ける船の振動

身の回りの振動現象の例

【テキストP10参照】

【ポイント】

身の回りの振動現象の例を挙げる。一般に振動は嫌われる場合が多いことを述べる。

【解説】

身の回りの振動現象として、悪路を走行中の自動車の振動、荒波を受ける船の振動などの例を挙げる。これらの振動は操縦性を悪化させたり、船酔いを引き起こすので嫌われる場合が多く、振動を小さくすることが望まれる。

ただし、ゆりかごや携帯電話のマナーモードなど、振動が積極的に利用される場合もある。

機械の振動問題

有害な機械振動の例

対　象	問　題
自動車	疲労破壊
	操安性の低下
	乗心地の悪化
工作機械	加工精度の低下
	騒音
ロボット	高速位置決め精度の低下
回転機械	ふれまわり運動

軽量化と高出力化

加速度＝力／質量

加速度 大 → **振動 大**

- 軽量化

  質量 小 → 振動 大
- 高出力化

  力 大 → 振動 大

【テキストP10参照】

【ポイント】

機械振動はどのような場面で問題になるのかを示し、機械振動の計測と解析を学習する必要性を認識させる。

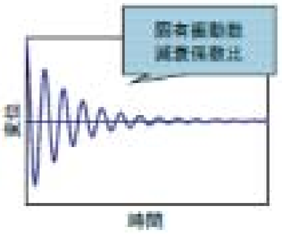
【解説】

一般に機械は、回転運動や往復運動などの周期的な運動を行う場合が多く、振動現象が発生しやすい。特に最近の機械では、高速化や軽量化の要求から剛性が低くなり、大きな振動が発生しやすい傾向がある。

機械振動の問題は、機械の部材が疲労したり破壊にいたるような大きな応力を生ずる振動、機械の精度が悪化したり正常な運転が困難となる大振幅の振動、および人間に不快感を与えるような振動に大別できる。

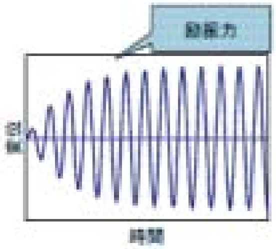
このような機械の振動問題に的確に対処するためには、機械の設計段階から振動特性を考慮する必要がある。このため振動計測の結果を用いる実験動特性解析や理論的な振動解析の重要性が増している。

自由振動と強制振動



自由振動

初期変位を与えた例



強制振動

周期的外力を加えた例

【テキストP10参照】

【ポイント】

自由振動と強制振動の概念を説明する。

【解説】

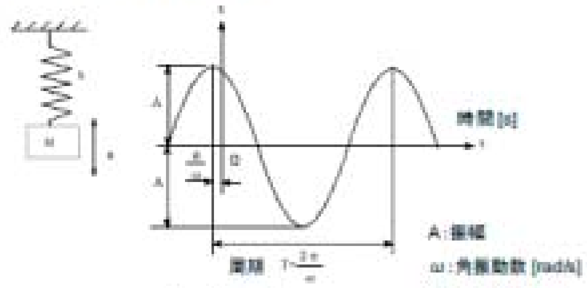
外力の有無という観点から振動を分類すると自由振動と強制振動に分けることができる。

自由振動は初期条件に依存して平衡位置のまわりで振動が持続するもので、その振動特性は固有振動数と減衰係数比に支配される。

一方、強制振動は外部から強制的な励振力が作用することで振動が持続するもので、その振動形態には励振力の作用が支配的である。

その他、振動的な外力を加えなくても、系の非線形性が原因で振動が成長するものを自励振動という。これ以降では自励振動についての説明は割愛している。

1－1－2　調和振動



調和振動　$x = A\cos(\omega t + \phi)$

振動数 [Hz]　$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

【テキストP11～P12参照】

【ポイント】

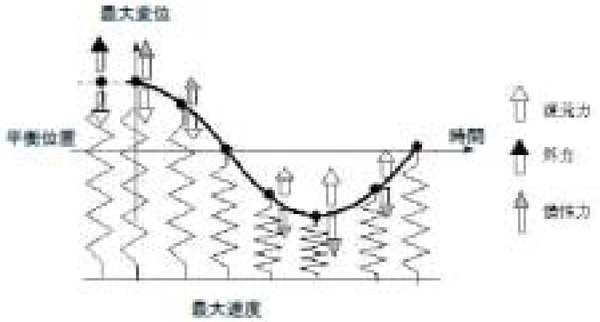
機械振動の基礎として、最も基本的な周期運動である調和振動の波形と表示方法について説明する。

【解説】

調和振動（単振動）は、最も基本的な周期運動であり、正弦関数または余弦関数で表される。

ここでは振動の基礎として、振幅、角振動数、位相、周期および振動数の意味と相互の関係を理解させる。

1－1－3 振動のからくり



【テキストP12～P13参照】

【ポイント】

ばね－質量系の自由振動を例にあげて、機械が振動するためには慣性と復元力が必要であるということを理解させる。

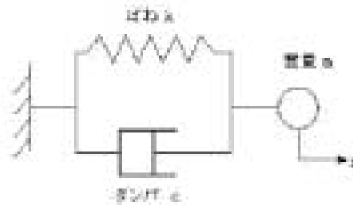
【解説】

機械が振動するためには、平衡点に引き戻そうとする復元力（ばねの力）と平衡点に留まらずに行き過ぎる作用を及ぼす慣性（質量の慣性）が必要である。

慣性力は動力学の関係を静力学に置き換えるために導入した見かけの力（ダランベールの原理）であり、慣性の作用（慣性の法則）そのものを表しているわけではないことに注意する。

力学的なエネルギーの観点からみると、振動系のエネルギーはポテンシャルエネルギー（ばねの変形エネルギー）と運動エネルギーの和で表すことができる。すなわちポテンシャルエネルギー最大（最大変位）の状態と運動エネルギー最大（最大速度）の状態の間でエネルギー形態は変化するものの、系全体のエネルギーについては保存されていることがわかる。

1－1－4 機械の力学モデル



慣性要素：　質量 m [kg]

復元要素：　ばね k [N/m]

減衰要素：　ダンパ c [Ns/m]

【テキストP13～P14参照】

【ポイント】

振動系の基本要素である、慣性要素、復元要素、および減衰要素として質量、ばね、およびダンパを示し、それらの力学的特性について説明する。

【解説】

機械振動系は、慣性要素の質量、復元要素のばね、および減衰要素のダンパで構成される。

一般的な質点系モデルを例に挙げると、質量を重心に集中させた質点、ばねはフックの法則に従う線形ばね、およびダンパは相対速度に比例した減衰力を発生する粘性減衰の特性を持っているものと仮定している。

エネルギーの観点からみると、減衰は系内の運動エネルギーを熱エネルギーに変換して外部に散逸させる。この熱エネルギーへの変換は非可逆的で、系内にエネルギーが保存されないため、減衰の存在する系を非保存系という。

第１－2節　１自由度系

学習のポイント
　1自由度系の自由振動で固有振動数の求め方と減衰がある場合の振動特性を、また強制振動で共振現象について学ぶ。

1－2－1　不減衰系の自由振動
1－2－2　減衰系の自由振動
1－2－3　不減衰系の強制振動
1－2－4　減衰系の強制振動
1－2－5　振動伝達
1－2－6　周波数応答関数

【節全体のポイント】

１自由度系の自由振動について固有振動数の求め方と減衰による振動特性を、さらに強制振動について共振現象、振動伝達、および周波数応答関数を理解させる。

【節全体の解説】

１自由度系の振動特性を調べることで、振動現象の基本概念を理解することができる。多自由度系の各モードも１自由度系として考えることができ、このことからも１自由度系について振動の基礎を学ぶことは重要である。

(1) 自由度の概念を説明する。

(2) １自由度系の自由振動について固有振動数の求め方を説明する。固有振動数を知ることは機械の設計やトラブルシューティングで重要である。

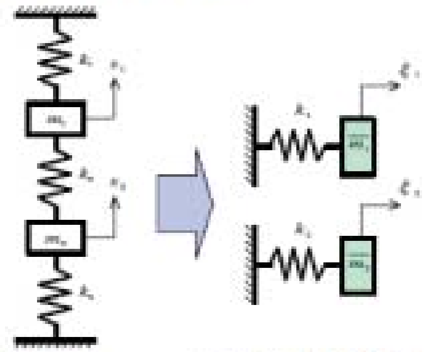
(3) 粘性減衰がある場合の振動特性を理解させ、実験的推定で利用される対数減衰率について説明する。

(4) １自由度系の強制振動の振動特性について説明し、系に発生する共振現象を理解させる。共振の発生は機械を破壊にいたらせるので共振を避けることが重要である。

(5) 振動の伝達の仕方と伝達率を説明し、防振対策としての振動絶縁法について理解させる。

(6) 系に調和入力を加えた場合の伝達特性を表す周波数応答関数およびボード線図について説明する。

モード座標への変換



物理座標　　　モード座標（1自由度）

【テキストP15参照】

【ポイント】

１自由度系の振動特性を理解することは重要である。多自由度系の振動の各モードも１自由度系として考えることができる。

【解説】

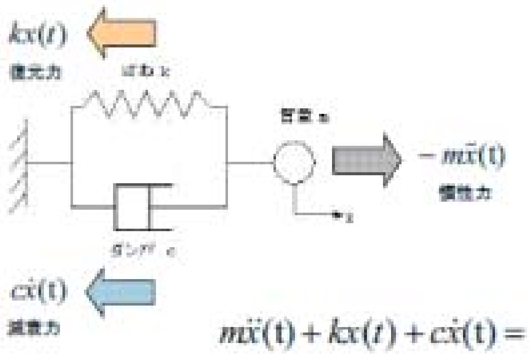
振動系の運動状態を表すのに必要最小限の座標の数を自由度という。１つの座標を指定することで、系の運動状態が定まるものを１自由度系と呼んでいる。

１自由度系の振動では、振動現象の概念がほぼ全て出現するため、１自由度系の振動特性を理解することは重要である。

またモード解析を用いることで、多自由度系の振動の各モードも１自由度系として考えることができる。

NOKAIDAI

運動方程式



$$m\ddot{x}(t)+kx(t)+c\dot{x}(t)=0$$

【テキストP13－P14参照】

【ポイント】

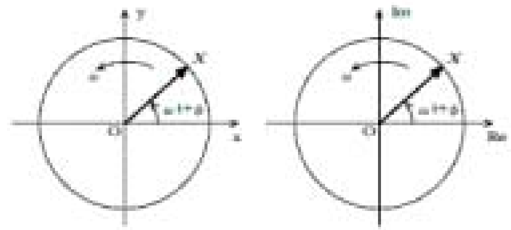
慣性力、復元力、および減衰力から機械振動系の運動方程式を導く。

【解説】

解析を行うためには力学モデルから運動方程式を導出する必要がある。ここではダランベールの原理より、慣性力を持ち込んで静的な力のつりあい式から運動方程式を導いている。

NOKAIDAI

調和振動の複素数表示



$x = X\cos(\omega t+\phi)$

$y = X\sin(\omega t+\phi)$

ベクトル表示

$\boldsymbol{X} = X\{\cos(\omega t+\phi)+j\sin(\omega t+\phi)\}$

$\boldsymbol{X} = Xe^{j(\omega t+\phi)}$

複素数表示

【テキストP15参照】

【ポイント】

振動は振幅と位相の2つのパラメータで表されるので、複素数で表現すると計算に便利である。

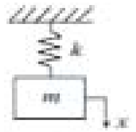
【解説】

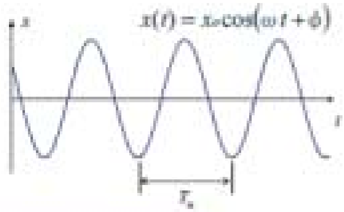
振動は振幅と位相の2つのパラメータで表されるので、ベクトルで表現すると1つの量で表現できて便利である。

原点を始点とする大きさXのベクトル$\boldsymbol{X}$がx軸からϕだけ傾いた位置から回転を始めると、そのx成分、y成分は調和振動を表すことがわかる。

ベクトルは数値的に扱うには不便なので、複素平面上の運動に置き換えて考えることとすると、実軸、虚軸への投影が調和振動を表すことになる。ただし現実の調和振動に相当するのは複素数の実部のみであることに注意する。また複素数表示は、特に複雑な問題を解く場面で威力を発揮するものである。

1−2−1 不減衰系の自由振動





$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$
$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad T_n = \frac{1}{f_n}$$

固有角振動数 [rad/s]　固有振動数 [Hz]　固有周期 [s]

【テキストP15～P17参照】

【ポイント】

1自由度系の自由振動について固有振動数の求め方を説明する。固有振動数を知ることは機械の設計やトラブルシューティングで重要である。

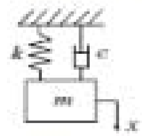
【解説】

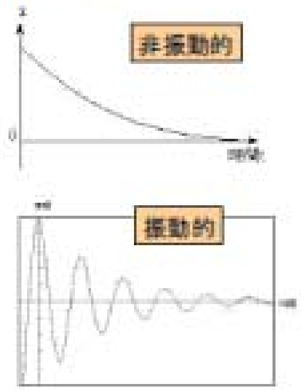
1自由度不減衰系の自由振動の運動方程式に初期条件を与えて解くと調和振動の解が導かれる。調和振動は一定の振幅と周期を保ちながら平衡点の回りで振動を続けるものである。

この自由振動は固有角振動数（固有円振動数）ω_nという特定の角振動数でしか振動しないという性質がある。固有角振動数は系の質量mとばね定数kが与えられると一意に定まる系固有の特性を示す量である。

機械の振動問題は固有振動数に関連して発生する。このため固有振動数を知ることは機械の設計やトラブルシューティングを行う上でとても重要なことである。

1−2−2 減衰系の自由振動





$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$
$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad c_c = 2\sqrt{mk}$$

減衰係数比　臨界減衰係数 [Ns/m]

【テキストP17～P19参照】

【ポイント】

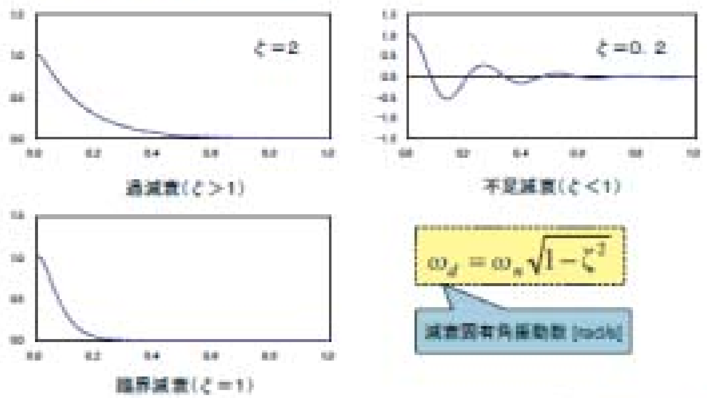
粘性減衰がある系の振動特性は減衰係数比に支配される。

【解説】

粘性減衰がある1自由度振動系の振動特性は減衰係数の値により様相が異なり、振動的または非振動的な運動となる。その臨界値となる減衰係数のことを臨界減衰係数という。

減衰係数と臨界減衰係数の比を減衰係数比（減衰比）といい、減衰係数比の値により運動方程式の解は3通りに分けられる。

減衰系の減衰振動波形



$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

減衰固有角振動数 [rad/s]

【テキストP17～P19参照】

【ポイント】

減衰系の運動方程式の解は減衰係数比により3通りに分けられる。

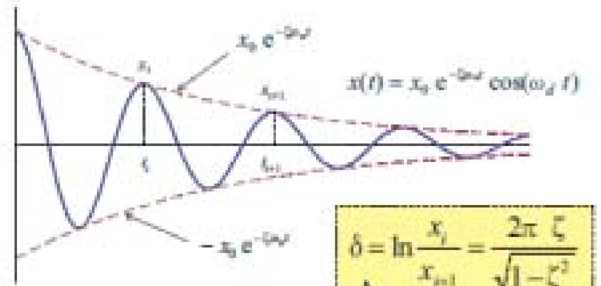
【解説】

1自由度の減衰系の運動方程式の解は、減衰係数比ζの値により3通りに分けられる。

ζ>1の場合を過減衰(非振動的)、ζ=1の場合を臨界減衰、ζ<1の場合を不足減衰(振動的)という。

不足減衰の場合の角振動数ω_dを減衰角振動数といい、不減衰系の固有角振動数ω_nより小さな値となるが、ζが小さいときにはω_nにほぼ等しいと考えてよい。例えばζ=0.2の場合でも、その差は2%程度である。

対数減衰率



$$\delta = \ln\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

対数減衰率

【テキストP18～P19参照】

【ポイント】

不足減衰系の振動波形の隣り合う振幅の比は一定である。

【解説】

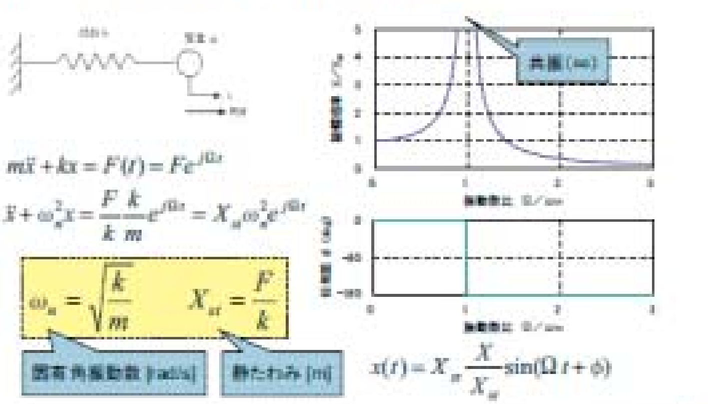
不足減衰の場合の振動波形は、調和振動する三角関数と時間の経過とともにゼロに収束する指数関数との積で表され、指数関数を包絡線とする減衰振動曲線となる。

この減衰振動曲線の隣り合う振幅の比は一定値となり、減衰係数比だけで定まる。この振幅比の対数をとったものを対数減衰率と呼んでいる。

ここで減衰係数比ζが小さい場合には、対数減衰率δ≒2πζと近似できる。

系の減衰自由振動の波形を実験的に求めれば、振幅比から対数減衰率δを導くことができ、減衰係数比ζを推定することができる。

１－２－３　不減衰系の強制振動



【テキストP19－P21参照】

【ポイント】

１自由度系の強制振動の振動特性について説明し、系に発生する共振現象を理解させる。共振の発生は機械を破壊にいたらせるので共振を避けることが重要である。

【解説】

系に時間的に変動する力が作用したり、系の支持部が時間的に変位したりするときに発生する振動を強制振動という。ここでは、１自由度不減衰系に調和的励振力が作用する場合について説明する。

１自由度不減衰系の強制振動の運動方程式を解くと、一般解は自由振動解（F=0とおいた式、すなわち同次方程式の一般解）と強制振動解（非同次方程式の特解）の和で表される。ここで系に減衰が存在する場合（実際の系には必ず存在する）には、時間が経過すれば自由振動解は消滅し、振幅が一定で励振力と同じ振動数をもつ強制振動解のみが残る。

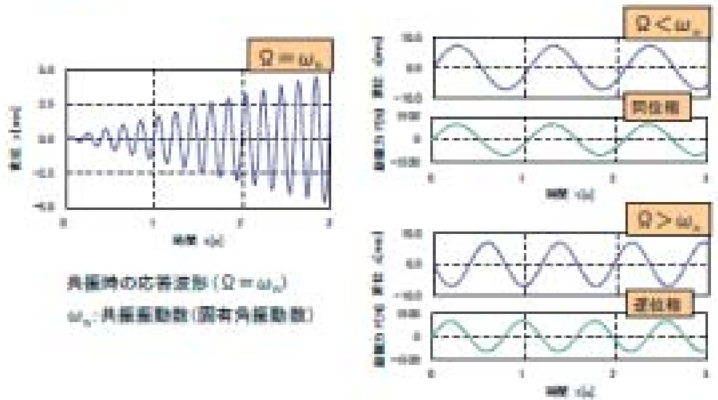
系に大きさFの力が静的に作用したときの変位を静的たわみX_{st}という。励振力が作用したときの強制振動解の振幅Xと静的たわみX_{st}との比を振幅倍率（振幅比）という。励振力の振動数（振動数比）を変化させたときの、振幅倍率と位相差の変化を示した図を応答曲線（共振曲線）という。

励振力の振動数Ωが固有角振動数ω_nに近づくにつれて振幅は増大し、振動数が一致する（$\Omega/\omega_n=1$）と振幅は無限大となる。このような現象を共振といい、この振動数を共振振動数という。

共振振動数より低い振動数域では系は励振力と同位相で運動するが、高い振動数域では逆位相となる。

機械系において共振現象が発生すると、機械振動の振幅が著しく増大し、ひいては破壊にいたることもある。このため共振の発生を避けることは重要なことである。

共振



【テキストP20参照】

【ポイント】

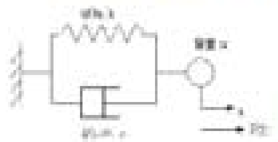
共振振動数では時間の経過とともに振幅が直線的に増大する応答波形となる。また共振点を境に位相は逆転する。

【解説】

１自由度不減衰系において調和励振力の振動数が共振振動数と一致した場合には共振現象が発生する。このときの振幅は時間の経過とともに増大する。すなわち共振時の振幅は瞬時に無限大となるわけではない。このことは例えば、共振振動数より高い振動数で機械を運転したい場合に、励振力の振動数を速やかに変化させることで、振幅の増大を抑えて共振振動数を通過させることができることを示している。

また共振点では位相が逆転するので、位相を調べることで共振振動数を通過したことが判断できる。

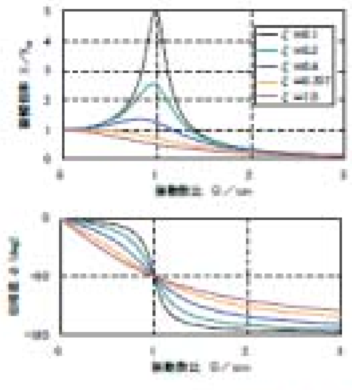
1−2−4　減衰系の強制振動



$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x = X_a\omega_n^2e^{j\Omega t}$$

$$\frac{X}{X_a}=\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\varphi=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$



【テキストP21〜P22参照】

【ポイント】

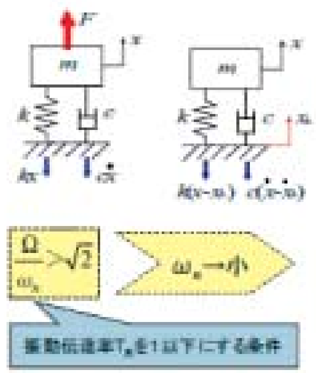
減衰系の共振現象では減衰(ダンピング)が大きくなるにつれて最大振幅が減少する。

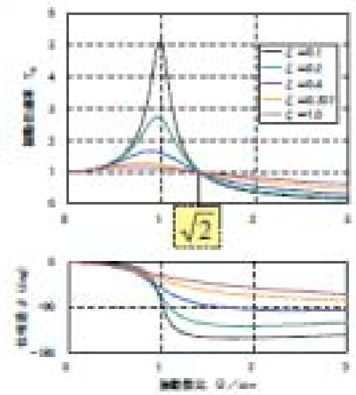
【解説】

1自由度減衰系の共振曲線において、振幅の最大値は減衰比ζに支配される。減衰比ζが大きくなるにつれて最大振幅は減少し、$\zeta>1/\sqrt{2}(0.707)$となると極大値が存在しなくなる。このように、減衰を大きくすることで共振を抑えることができる。

応答変位と励振力の位相差φは減衰を大きくしていくと、0°から−180°まで緩やかに変化するようになる。ここで、共振点では減衰比ζの値に関わらず位相差は−90°となる。

1−2−5　振動伝達





【テキストP22〜P24参照】

【ポイント】

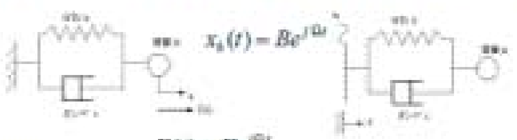
振動の伝わり方と伝達率について説明し、防振対策としての振動絶縁法について理解させる。防振効果を高めるためには、系の固有角振動数は低くする必要がある。

【解説】

振動の伝達が問題にされる場合として、機械で発生した振動が基礎に伝わる「力の伝達」と、基礎の変動が機械に伝わる「変位の伝達」の2通りの伝達形態がある。力の伝達率と変位の伝達率は、どちらも同じ式で表され、これを振動伝達率と呼んでいる。

防振のために、機械から基礎へ伝達する力を励振力より小さくする、または基礎の変位より機械の振動変位を小さくするのには、振動伝達率を1以下にする必要がある。この条件を満足するには図より、$\Omega/\omega_n>\sqrt{2}$である必要がある。これは系の固有角振動数を低くすることで実現でき、柔らかいばねによる柔軟支持を意味している。このとき減衰比ζは小さい方が振動伝達率が小さくなるが、共振振動数では逆に伝達率が増大してしまうので適切な減衰を与える必要がある。

基礎への伝達力と基礎加振による応答



$$x_b(t) = Be^{j\Omega t}$$

$$F(t) = Fe^{j\Omega t}$$

$$F_T = c\dot{x} + kx \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_b + kx_b$$

$$F_T = FT_R\sin(\Omega t + \phi) \qquad x(t) = BT_R\sin(\Omega t + \phi)$$

$$T_R = \sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad \phi = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^3}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

【テキストP22～P24参照】

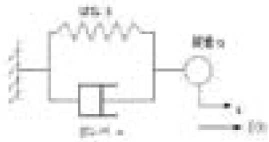
【ポイント】

力の伝達率と変位の伝達率は、どちらも同じ式で表される。

【解説】

力の伝達率｜F_T｜／Fと変位の伝達率｜x｜／Bは、どちらも同じ式で表すことができる。これを振動伝達率T_Rと呼んでいる。

1－2－6　周波数応答関数

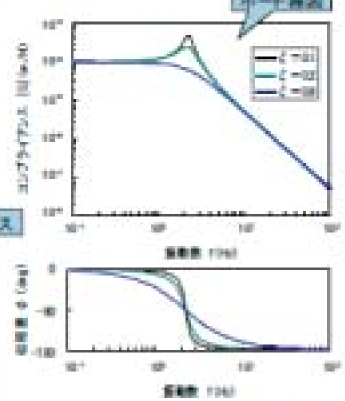


$$G(\Omega) = \frac{X}{F} = |G|e^{j\varphi}$$

コンプライアンス

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}\frac{1}{k}$$

$$\varphi = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \qquad \beta = \frac{\Omega}{\omega_n}$$



【テキストP24～P25参照】

【ポイント】

系に調和入力を加えた場合の伝達特性を表す周波数応答関数およびボード線図について説明する。

【解説】

一般に出力と入力の比を伝達関数という。系に調和的な入力を加えたときの定常応答を出力として、このときの伝達関数を調和的入力の角振動数の関数として表現したものを周波数応答関数（伝達関数と呼ぶ場合も多い）という。いま調和励振力を入力とし、出力として変位応答を選んだ場合の周波数応答関数のことをコンプライアンス（リセプタンス）と呼んでいる。

周波数応答関数を図示する場合に、よく用いられる方法としてボード線図がある。ボード線図は横軸を振動数とし、縦軸に周波数応答関数のゲイン｜G｜（複素平面上の大きさ）と位相差φ（複素平面上の偏角）をそれぞれ分けて図示したものである。またボード線図の横軸とゲイン軸は対数目盛で表されるのが普通である。

周波数応答関数の種類

定義	名称	関係	単位
変位/力	コンプライアンス	G	m/N
速度/力	モビリティ	jΩG	m/(Ns)
加速度/力	アクセレランス	$-\Omega^2$G	m/(Ns^2)
力/変位	動剛性	1/G	N/m
力/速度	機械インピーダンス	-j/(ΩG)	Ns/m
力/加速度	動質量	$-1/(\Omega^2$G)	Ns^2/m

【テキストP24～P25参照】

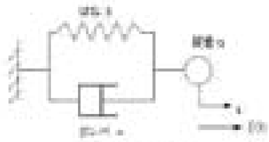
【ポイント】
周波数応答関数の種類について説明する。

【解説】
モード解析で用いられる周波数応答関数は、入力および出力として、力、変位、速度、および加速度を選ぶことにより6種類の定義が考えられる。すなわち、コンプライアンス(compliance)、モビリティ(mobility)、アクセレランス(accelerance)、動剛性(dynamic stiffness)、機械インピーダンス(mechanical impedance)、および動質量(dynamic mass)である。ここで、コンプライアンスはリセプタンス(receptance)、アクセレランスはイナータンス(inertance)と呼ばれることがある。

コンプライアンスGが求められれば、他の周波数応答関数は表に示された関係から求めることができる。

周波数応答関数を図示する場合に、よく用いられる方法としてボード線図がある。ボード線図は横軸を振動数とし、縦軸に周波数応答関数のゲイン｜G｜(複素平面上の大きさ)と位相差φ(複素平面上の偏角)をそれぞれ分けて図示したものである。またボード線図の横軸とゲイン軸は対数目盛で表されるのが普通である。

コクアド線図

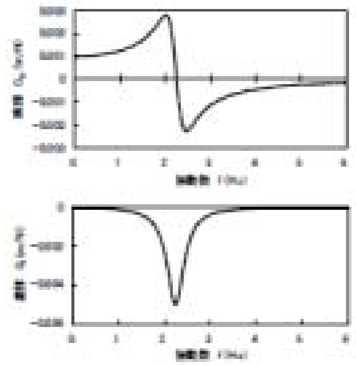


$$G_R = \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\zeta\beta)^2}\frac{1}{k}$$

$$G_I = \frac{-2\zeta\beta}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\zeta\beta)^2}\frac{1}{k}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

コンプライアンス

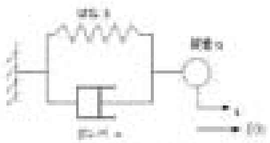


【テキストP24～P25参照】

【ポイント】
周波数応答関数(伝達関数)を図示する方法としてコクアド線図について説明する。

【解説】
周波数応答関数は複素数で表現されることが多い。このため表現方法としても複素数のままで図示する方法がある。複素数表現された周波数応答関数を実部と虚部に分け、振動数を横軸にとって図示したものをコクアド線図と呼ぶ。

ナイキスト線図

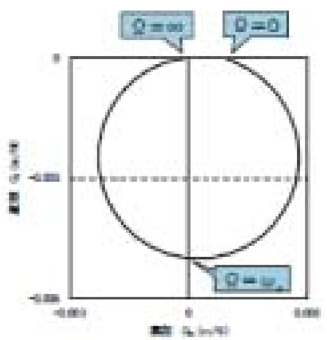


$$G_R = \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\zeta\beta)^2}\frac{1}{k}$$

$$G_I = \frac{-2\zeta\beta}{\left(1-\beta^2\right)^2 + (2\zeta\beta)^2}\frac{1}{k}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

コンプライアンス



【テキストP24－P25参照】

【ポイント】

　周波数応答関数（伝達関数）を図示する方法としてナイキスト線図について説明する。

【解説】

　周波数応答関数を複素数のままで図示する方法として、複素数表現された周波数応答関数を実部と虚部に分け、横軸に実部を縦軸に虚部をとって図示したものをナイキスト線図と呼ぶ。

第１－３節　２自由度系

学習のポイント
　２自由度系の特徴である連成と固有モードについて理解する。

１－３－１　不減衰系の自由振動

１－３－２　不減衰系の強制振動

１－３－３　減衰系の強制振動

【節全体のポイント】

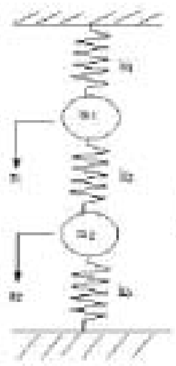
　モード解析への導入として、2自由度系の特徴である連成と固有モードについて説明する。

【節全体の解説】

　実際の機械の振動を解析する場合、多自由度系として取り扱わなければならない場合が多い。

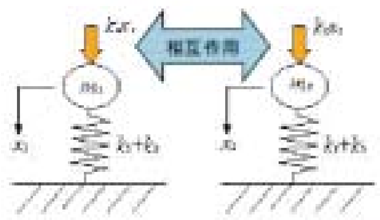
　ここでは多自由度系の最も簡単な場合である2自由度系について、振動特性の特徴である連成と固有モードの概念を理解させる。

1－3－1 不減衰系の自由振動（連成）



$$m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1\boxed{-k_2x_2}=0$$
$$m_2\ddot{x}_2\boxed{-k_2x_1}+(k_2+k_3)x_2=0$$

連成項



【テキストP26－P28参照】

【ポイント】

2自由度系の運動が連成していることを説明する。

【解説】

一般に2自由度不減衰系の運動方程式には連成項が存在する。例えば、図のように2個の質点m_1、m_2がばねk_1、k_2、k_3で結合されている場合の運動方程式では、質点m_1に関する式に質点m_2の変位x_2が、質点m_2に関する式に質点m_1の変位x_1が現れている。これは両質点間で相互作用を及ぼしあっていることを意味し、このことを運動が連成しているといっている。

固有角振動数（2自由度系）

運動方程式

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1+(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2)x_1-\omega_{12}^2x_2=0\\ \ddot{x}_2-\omega_{22}^2x_1+(\omega_{22}^2+\omega_{23}^2)x_2=0\end{aligned}\right\}$$

仮定した解

$$\left.\begin{aligned}x_1=A_1\sin(\omega t+\varphi)\\ x_2=A_2\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned}\right\}$$

$$\omega_{11}^2=\frac{k_1}{m_1},\quad \omega_{12}^2=\frac{k_2}{m_1},\quad \omega_{22}^2=\frac{k_2}{m_2},\quad \omega_{23}^2=\frac{k_3}{m_2}$$

振動数方程式（2次方程式）

$$\begin{vmatrix}-\omega^2+\omega_{11}^2+\omega_{12}^2 & -\omega_{12}^2\\ -\omega_{22}^2 & -\omega^2+\omega_{22}^2+\omega_{23}^2\end{vmatrix}=0$$

固有角振動数（2次方程式の根）

$$\omega_{n1}^2,\quad \omega_{n2}^2\quad (\omega_{n1}^2<\omega_{n2}^2)$$

【テキストP26－P28参照】

【ポイント】

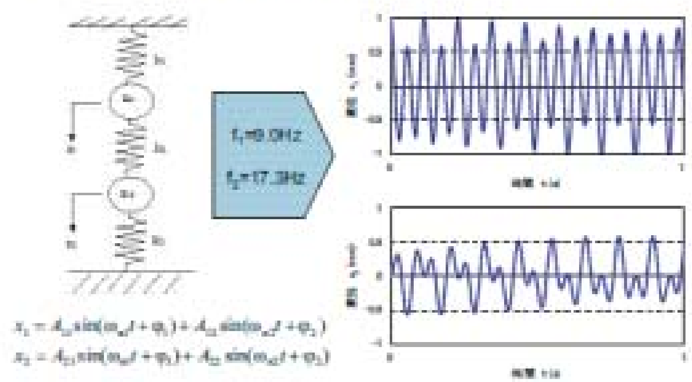
2自由度系の振動数方程式を解くことで、1次と2次の固有角振動数が求まる。

【解説】

多自由度系には自由度の数だけ固有角振動数が存在する。すなわち2自由度系には2個の固有角振動数が存在する。

2自由度不減衰系の自由振動の運動方程式について、解が調和振動を行うものと仮定すると、解が存在するための条件としてω^2に関する2次方程式が導かれる。この2次方程式のことを振動数方程式といい、振動数方程式の2つの根ω_{n1}^2、ω_{n2}^2を、それぞれ1次の固有角振動数、2次の固有角振動数という。

2自由度不減衰系の自由振動



$$x_1 = A_{11}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_{12}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$$
$$x_2 = A_{21}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1)+A_{22}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$$

【テキストP26～P28参照】

【ポイント】

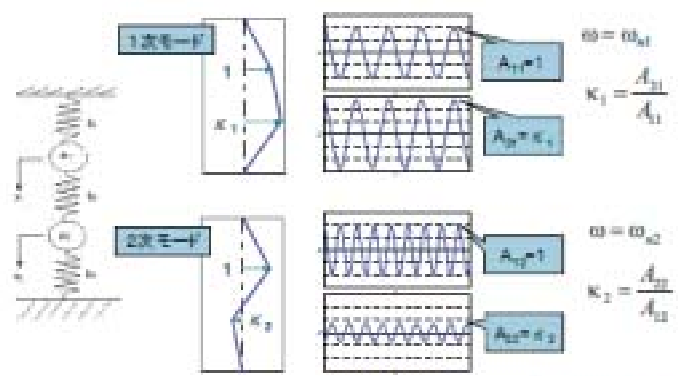
2自由度不減衰系の自由振動の一般解は、固有振動数の解を重ね合わせることで得られる。

【解説】

2自由度不減衰系の自由振動の一般解は、1次の固有振動数で調和振動を行う解と2次の固有振動数で調和振動を行う解との重ね合わせたものとなる。

ここで一般解の任意定数、A_{11}、A_{12}、A_{21}、A_{22}、ϕ_1、ϕ_2は初期条件と振幅比(後述)により定めることができる。

固有モード（2自由度系）



$\omega = \omega_{n1}$　$\kappa_1 = \dfrac{A_{21}}{A_{11}}$

$\omega = \omega_{n2}$　$\kappa_2 = \dfrac{A_{22}}{A_{12}}$

【テキストP26～P28参照】

【ポイント】

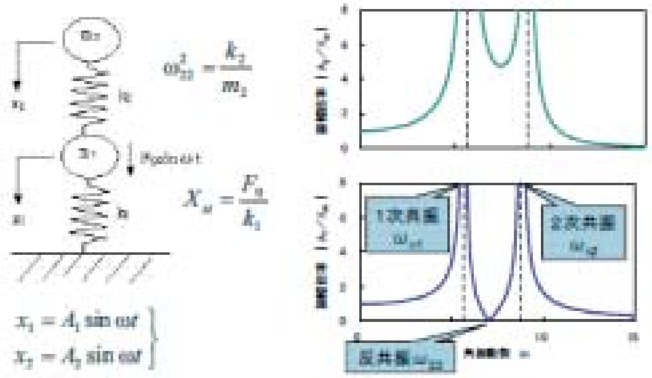
2自由度不減衰系の2個の固有振動数には、それぞれ対応する振動様式が存在し、これを固有モード(振動モード)とよぶ。

【解説】

2自由度不減衰系の自由振動において、1次の固有角振動数ω_{n1}に対応する振幅A_{11}とA_{21}との間には一定の関係がある。すなわち、振幅比κ_1として表される振動様式である。同様に2次の固有角振動数ω_{n2}に対応する振幅A_{12}とA_{22}との間にも関係が存在し、振動様式は振幅比κ_2で表される。これらの振動様式のことを固有モード、または振動モードといい、1次の固有角振動数に対するものを1次固有モード(1次モード)、2次の固有角振動数に対するものを2次固有モード(2次モード)とよんでいる。

このことは、この2自由度系を1次の固有角振動数で振動させた場合の振動様式は1次固有モードとなり、2次の固有角振動数で振動させた場合の振動様式は2次固有モードとなることを示している。ここで、振幅比κ_1>0より1次固有モードでは同位相、κ_2<0より2次固有モードでは逆位相で振動する。

1−3−2 不減衰系の強制振動（2自由度系）



$$\omega_{22}^2=\frac{k_2}{m_2}\qquad X_{st}=\frac{F_0}{k_1}$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A_1\sin\omega t\\ x_2&=A_2\sin\omega t\end{aligned}\right\}$$

【テキストP28〜P29参照】

【ポイント】

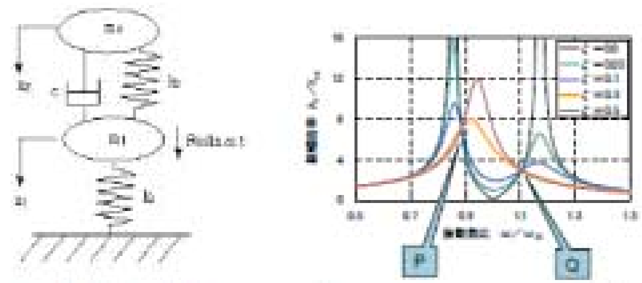
2自由度不減衰系の強制振動では、系の固有角振動数で共振現象が発生する。また反共振角振動数 ω_{22} で m_1 は静止する。

【解説】

2自由度不減衰系に調和的外力が作用する場合、外力の振動数 ω が系の固有角振動数 ω_{n1}、ω_{n2} と一致すると共振現象が発生する。1次の固有角振動数 ω_{n1} での共振を1次共振、2次の固有角振動数 ω_{n2} での共振を2次共振という。

外力の角振動数 ω が ω_{22} と一致すると質点 m_1 は静止する。この点を反共振点といい、ここでは外力と大きさが等しく逆位相の力が m_1 に作用しているため、質点 m_1 の振幅が0になっている。この性質を利用して振幅を小さく抑えるために付加する副振動系を動吸振器という。

1−3−3 減衰系の強制振動（2自由度系）



$$\left.\begin{aligned}x_1&=A_1\sin(\omega t-\phi_1)\\ x_2&=A_2\sin(\omega t-\phi_2)\end{aligned}\right\}\qquad \omega_{22}^2=\frac{k_2}{m_2}\qquad \zeta=\frac{c}{2\sqrt{m_2k_2}}\qquad X_{st}=\frac{F_0}{k_1}$$

【テキストP30〜P32参照】

【ポイント】

2自由度減衰系の強制振動では、減衰比 ζ の値により系の応答が大きく異なる。

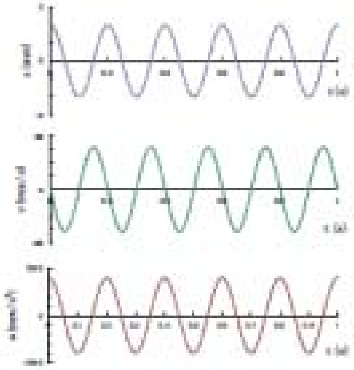
【解説】

2自由度減衰系に調和的外力が作用する場合、質点 m_1 の振幅特性は減衰比 ζ の値により大きく変化する。

減衰比 $\zeta=0$ の不減衰系の応答から、ζ の値を大きくしていくと2つの共振ピークが小さくなっていき、$\zeta=\infty$ では質点 m_1 と m_2 が一体となって運動するので固有角振動数は一つになる。すなわち、固有振動数 $(k_1/(m_1+m_2))^{1/2}$ にピークをもつ1自由度系となる。

また減衰比 ζ に関わらず、応答曲線はP点とQ点を必ず通る。このP点とQ点の高さを等しくし、P点とQ点で曲線が極大となるように m_2、c、k_2 の値を設計すると、質点 m_1 の振動を効果的に抑制することができる。これを動吸振器の最適設計という。

［例題１］



振幅 A=2mm, 振動数 f=5Hz

$$x = A\cos\omega t$$
$$\omega = 2\pi f$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$
$$|v| = A\omega = 2\times 2\pi\times 5$$
$$= 62.8\mathrm{mm/s}$$

$$a = -A\omega^2\cos\omega t$$
$$|a| = A\omega^2 = 2\times(2\pi\times 5)^2$$
$$= 1974\mathrm{mm/s^2}$$

【テキストP33参照】

【ポイント】

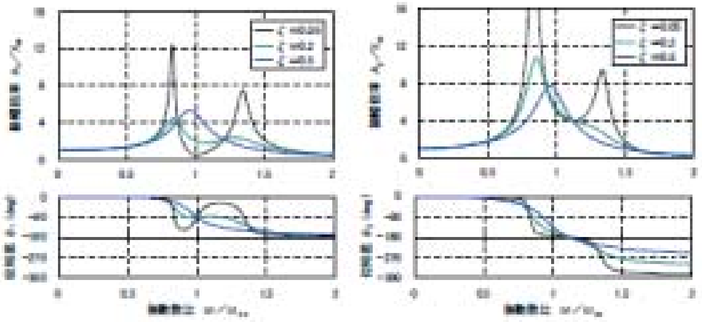
振幅2[mm]，振動数5[Hz]で振動する物体の最大速度と最大加速度を求める。

【解説】

調和振動の変位の式を時間で微分すると速度の式、速度の式を時間で微分すると加速度の式が得られる。

最大速度と最大加速度は，この速度の式および加速度の式の絶対値をとったものである。

応答曲線（2自由度減衰系）



【テキストP30－P32参照】

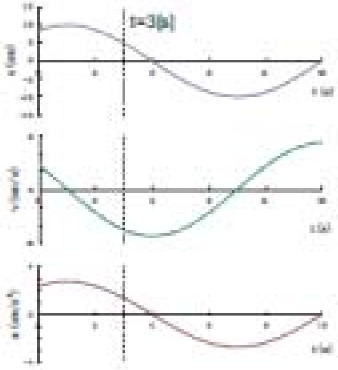
【ポイント】

2自由度減衰系の強制振動の応答曲線を示す。質点m_1の位相差は最大で180°，質点m_2の位相差は最大で360° 遅れる。

【解説】

2自由度減衰系に調和的外力が作用する場合の応答曲線では，質点m_1の応答変位と加振力の位相差ϕ_1は，0° から最大で180° まで遅れる。また質点m_2の応答変位と加振力の位相差ϕ_2は，0° から最大で360° まで遅れている。これは質点m_2の応答が質点m_1の応答に対して，0° から最大で180° まで遅れているためと考えると理解しやすい。

［例題2］



$$x = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 5\text{cm}$$

$$v = 10 \times \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= -4.53\text{cm/s}$$

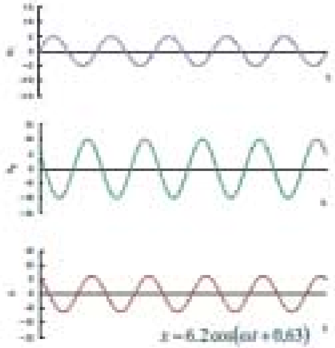
$$a = -10 \times \frac{\pi^2}{36}\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= -1.37\text{cm/s}^2$$

【テキストP33参照】

【ポイント】
時刻3sでの調和振動の変位、速度、加速度の値を求める。

【解説】
調和振動の変化、速度、加速度の式に時間t＝3sを代入し計算する。

［例題3］



$$x_1 = 5\sin\omega t = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$x_2 = 10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \varphi\right)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\{(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2\}}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

$$A = 6.20,\ \varphi = 0.894$$

【テキストP34参照】

【ポイント】
2つの調和振動の合成振動を求める。

【解説】
振動数が等しい調和振動を合成すると、合成後の振動も同じ振動数の調和振動となる。

［例題４］

モーメントのつりあい式

$$-ML^2\ddot{\theta} = MgL\sin\theta$$

θが微小 → $\sin\theta \cong \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

単振動の式（標準形）

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

【テキストP35参照】

【ポイント】

単振子の固有円振動数（固有角振動数）を求める。

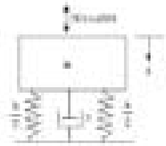
【解説】

慣性力を考えてモーメントのつりあい式から考えると理解しやすい。

単振子の運動方程式は非線形となるが、振れ角θが十分に小さければ線形化することができる。

運動方程式を単振動の標準形の式に変形することで固有円振動数が求まる。

［例題５］



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos\omega t$$

初期条件：

$x(0) = 20[mm]$,　$x'(0) = 250[mm/s]$

解：

$$x = 26.15e^{-1.99t}\sin(17.2t + 0.871) + 0.00469\sin(20t - 0.896)$$

同次方程式の一般解

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 17.3,\quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = 0.115,$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = 17.2$$

特殊解

$$x = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{k - m\omega^2}{c\omega}\right)$$

【テキストP35～P37参照】

【ポイント】

１自由度減衰系の強制振動の一般解を求める。

【解説】

１自由度減衰系の強制振動の一般解は、同次方程式の一般解と非同次方程式の特解を重ね合わせたものとなる。ここで同次方程式の一般解とは自由振動の解のことである。このため未定係数Cとφの値を初期条件から定める必要がある。

［問題１］

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 10\,e^{j(\omega t+\pi/4)} \\ r_2 = 5\,e^{j(\omega t+\pi/6)} \end{array}\right\} \quad r = r_1 + r_2 = \left(10e^{j\frac{\pi}{4}} + 5e^{j\frac{\pi}{6}}\right)\cdot e^{j\omega t} = Ae^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}$$

実軸成分： $A\cos\varphi = 10\cos\frac{\pi}{4} + 5\cos\frac{\pi}{6} = 11.4$

虚軸成分： $A\sin\varphi = 10\sin\frac{\pi}{4} + 5\sin\frac{\pi}{6} = 9.57$

$$r = A\,e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$A = \sqrt{11.4^2 + 9.57^2} = 14.9$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{9.57}{11.4}\right) = 0.698$$

【テキストP38参照】

【ポイント】

複素ベクトルの合成（調和振動の合成振動）を求める。

【解説】

振動数が等しい調和振動の合成を複素ベクトルとして行っている。

［問題２］

$$m = 50[kg]$$

$$k = 100[N/m]$$

$$c = 50[N\cdot s/m]$$

減衰比

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{20}{2\sqrt{50\times 100}} = 0.141$$

【テキストP38参照】

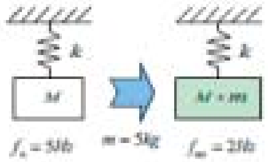
【ポイント】

減衰比を求める。

【解説】

1自由度直線運動を行うばね・質量・ダンパ系の減衰比の定義式から求める。

[問題3]



$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \qquad f_{nm} = \frac{\omega_{nm}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

$$k = 4\pi^2 f_n^2 M$$

$$M = \frac{f_{nm}^2}{f_n^2 - f_{nm}^2} m = \frac{4}{25-4} \times 5 = 0.952\mathrm{kg}$$

$$k = 4\pi^2 \times 25^2 \times 0.952 = 940\mathrm{N/m}$$

【テキストP38参照】

【ポイント】

固有振動数から系のパラメータを求める。

【解説】

当初の系の固有振動数と質量を付加した系の固有振動数の定義式を導く。これら2式から未知数が求まる。

[問題4]

モーメントのつりあい

$$-Ma\ddot{\theta} \times a - kb\theta \times b = 0$$

運動方程式

$$Ma^2\ddot{\theta} + kb^2\theta = 0 \quad \Rightarrow_{\text{標準形}} \quad \ddot{\theta} + \frac{kb^2}{Ma^2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \qquad \omega_n = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

【テキストP38参照】

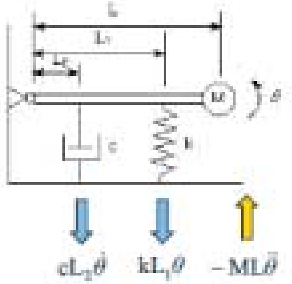
【ポイント】

回転振動系の固有角振動数を求める。

【解説】

平衡状態からの微小回転角 θ を考え、モーメントのつりあい式から運動方程式を導く。運動方程式を標準形に変形すると固有角振動数が求まる。

［問題5］



運動方程式（標準形）

$$\ddot{\theta}+\frac{cL_2^2}{ML^2}\dot{\theta}+\frac{kL_1^2}{ML^2}\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+2\zeta\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=0$$

減衰固有円振動数

$$q=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

$$\omega_n=\frac{L_1}{L}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\zeta=\frac{L_2^2}{L_1L}\times\frac{c}{2\sqrt{Mk}}$$

モーメントのつりあい

$$-ML\ddot{\theta}\times L-kL_1\theta\times L_1-cL_2\dot{\theta}\times L_2=0$$

【テキストP39参照】

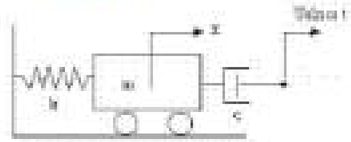
【ポイント】

回転振動系の減衰固有円振動数を求める。

【解説】

平衡状態からの微小回転角 θ を考え、モーメントのつりあい式から運動方程式を導く。運動方程式を標準形に変形すると固有円振動数と減衰比が求まる。

［問題6］



強制変位: $u=U\sin\omega t$

運動方程式

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{u}$$

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=2\zeta\omega_n\omega U\cos\omega t$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad \zeta=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

解を複素表示で仮定

$$x=\tilde{A}e^{j\omega t}\qquad \dot{u}=j\omega U e^{j\omega t}$$

$$\tilde{A}=\frac{j\cdot 2\zeta\omega_n\omega U}{\omega_n^2-\omega^2+j\cdot 2\zeta\omega_n\omega}$$

$$\tilde{A}=Ae^{j\phi}$$

$$A=\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}U}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

【テキストP39参照】

【ポイント】

変位による強制振動の定常状態における変位振幅を求める。

【解説】

運動方程式を標準形で表し、定常振動の解を複素表示で仮定する。この仮定した解を運動方程式に代入すると複素振幅が求まる。この複素振幅の絶対値が変位振幅となる。

第１－４節　モデル化と運動方程式

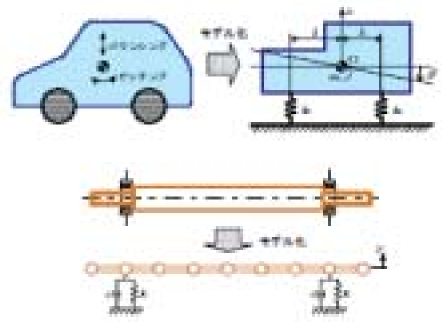
学習のポイント
　振動解析を行う対象のモデル化および運動方程式の作り方について学ぶ。

【節全体のポイント】
　振動解析を行う対象のモデル化手法および運動方程式の作り方について説明する。

【節全体の解説】
　目的に応じて問題の本質を失わない程度に簡単化して力学モデルを構築する。1自由度系または2自由度系のようになるべく簡単なモデルを構築することで、見通しがよくなり解析が容易になる。

(1) 問題の本質をおさえて簡単化した力学モデルを構築する必要性を理解させる。
(2) 力学モデルに対して運動方程式を作る手法を説明する。
(3) モデル化の際に用いられる等価系の考え方を理解させる。

１－４－１　モデル化



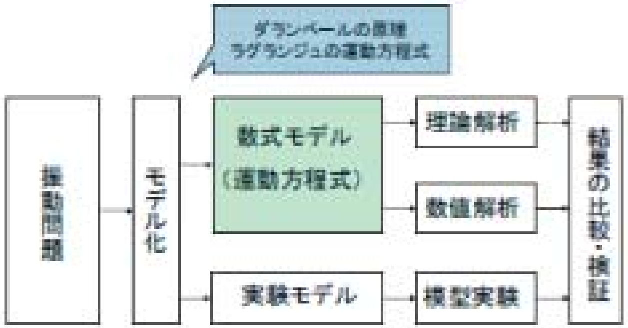
モデル化の例

【テキストP40参照】

【ポイント】
　問題の本質をおさえて簡単化した力学モデルを構築する必要性を理解させる。

【解説】
　目的に応じて問題の本質を失わない程度に簡単化して力学モデルを構築する。1自由度系または2自由度系のようになるべく簡単なモデルを構築することで、見通しがよくなり解析が容易になる。
　モデル化の例1は、悪路を走行する自動車をモデル化した例である。乗心地と操縦安定性の問題を考える場合、車体の上下運動とピッチング運動に着目することで、適切なモデル化を行うことができる。この例では、サスペンション系をばねで近似し、車体の重心の上下運動と重心回りの回転運動からなる2自由度系にモデル化している。
　モデル化の例2は、回転軸の振動特性を調べるためのモデル化の例である。軸のたわみ振動（横振動、曲げ振動）を解析する場合、質量や剛性が系内で連続的に分布している分布系（分布定数系、連続体）としてモデリングすることで、厳密な解析結果を得ることができる。しかし、分布系の運動方程式は偏微分方程式となり、複雑な形状を解析することは数学的取り扱い上から困難である。このため、多数の質点からなる集中系（集中定数系）としてモデル化される。この例では、軸受けをばねとダンパで近似し、軸を有限個の集中質量とそれらを結合するばねで置き換えた多自由度系にモデル化している。

1－4－2　運動方程式



【テキストP41参照】

【ポイント】

モデル化の次に運動方程式が作られる。

【解説】

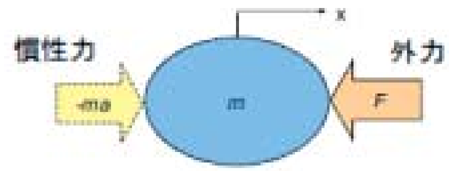
振動問題を解析するために、モデル化の次に運動方程式が作成される。

運動方程式はニュートンの運動法則（第2法則）から直接求められるが、その導出にはダランベールの原理による方法や、多自由度系に対してはラグランジュの運動方程式がよく用いられる。

ダランベールの原理

$ma = F$　　ニュートンの運動法則（動力学の式）

$F + (-ma) = 0$　　静的力のつりあい（静力学の式）



【テキストP41～P42参照】

【ポイント】

ダランベールの原理を用いると動力学の式を静力学の力のつりあい式に変換することができる。

【解説】

運動方程式はニュートンの運動法則から導くことができる。このとき、慣性力という見かけ上の静的な力が物体に作用していると考えるダランベールの原理に基づくと、静力学の力のつりあいを考えることで運動方程式を導出することができる。

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_r}=Q_r \quad (r=1,2,\cdots,n)$$

$L=T-U$　ラグランジュ関数

$T=\frac{1}{2}\sum m_r\dot{q}_r^{\,2}$　運動エネルギー

$U=\frac{1}{2}\sum k_r q_r^{\,2}$　ポテンシャルエネルギー

$\Phi=\frac{1}{2}\sum c_r\dot{q}_r^{\,2}$　散逸関数

【テキストP42参照】

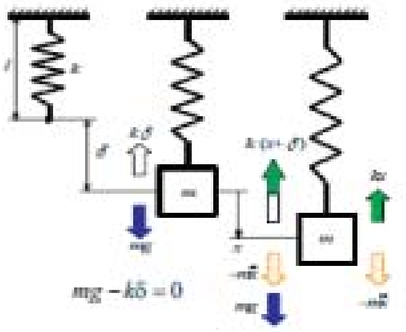
【ポイント】

多自由度系の運動方程式を導く場合にはラグランジュの運動方程式がよく利用される。

【解説】

複雑で大規模な系では、運動方程式をニュートンの運動法則から直接に導出するのは困難なので、ラグランジュの運動方程式が利用される。

［例1］ ばねー質量系



力のつりあい

$$-m\ddot{x}+mg-k(x+\delta)=0$$

運動方程式

$$m\ddot{x}+kx=0$$

【テキストP41－P42参照】

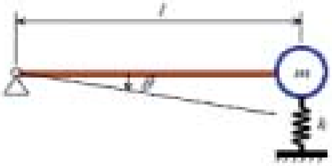
【ポイント】

ダランベールの原理による静的な力のつりあいから運動方程式を導く例を示す。

【解説】

ばねで天井から吊り下げられた物体の上下運動の運動方程式を導く。まずばねに物体を吊り下げて、重力とばねの復元力が平衡した状態のつりあい式を示す。つぎに平衡点回りの運動状態を考え、ダランベールの原理より慣性力を導入して力のつりあい式を示す。この式に平衡の式を適用することで、運動方程式を導くことができる。

［例2］ 棒の微小回転系



$$T=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$$

$$U=\frac{1}{2}k(l\theta)^2 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta}=-kl^2\theta$$

運動方程式

$$ml^2\ddot{\theta}+kl^2\theta=0$$

【テキストP43参照】

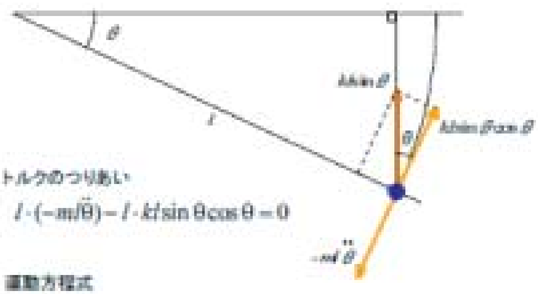
【ポイント】

ラグランジュの運動方程式を用いて運動方程式を導く例を示す。

【解説】

回転系に対する運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを示し、これをラグランジュの運動方程式に代入することで運動方程式を導くことができる。

［例3］ 棒の微小回転系



トルクのつりあい

$$l\cdot(-ml\ddot{\theta})-l\cdot kl\sin\theta\cos\theta=0$$

運動方程式

$$J\ddot{\theta}+kl^2\theta=0 \qquad J=ml^2 \quad \text{慣性モーメント}$$

【テキストP43〜P44参照】

【ポイント】

ダランベールの原理による静的なトルク（力のモーメント）のつりあいから運動方程式を導く例を示す。

【解説】

例2の系の運動方程式をトルクのつりあいから導く。ダランベールの原理より慣性力を導入してトルクのつりあい式を示す。この式は非線形であるが、回転角が微小の場合には線形化でき（$\sin\theta \fallingdotseq \theta$、$\cos\theta \fallingdotseq 1$）、例2と同様の運動方程式を導くことができる。

直線運動系と回転運動系の対応

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F$	$J\ddot{\theta}+c_\theta\dot{\theta}+k_\theta\theta=T$
変位　x [m]	角変位　θ [rad]
力　F [N]	トルク　T [N·m]
質量　m [kg]	慣性モーメント　J [kg·m²]
ばね定数　k [N/m]	ねじりばね定数　k_θ [N/m]
減衰係数　c [N·s/m]	ねじり減衰係数　c_θ [N·s/m]

【テキストP44参照】

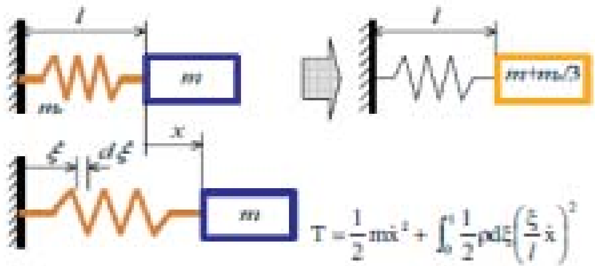
【ポイント】

直線運動系と回転（ねじり）運動系の間の対応関係を示す。

【解説】

直線運動系と回転運動系の間には表に示したような対応関係がある。運動方程式が同様な形であれば、その解も同じ形となる。

1－4－3　等価質量



$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\int_0^l\frac{1}{2}\rho d\xi\left(\frac{\xi}{l}\dot{x}\right)^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{\rho l}{3}\right)\dot{x}^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{m_s}{3}\right)\dot{x}^2$$

【テキストP45参照】

【ポイント】

ばねの質量が重心に集中した等価質量系へ近似する方法を示す。

【解説】

ばねの質量が無視できない場合、ばねの質量を考慮して分布定数系として取り扱うこととなる。しかし一般に分布定数系の解析は簡単ではない。ここでは運動エネルギーの等価性に基づき、重心に質量が集中した等価質量系への近似方法を紹介する。

コイルばねと質点の系を例にとり説明する。ばねの平衡長をl、ばねの単位長さあたりの質量をρとすると、ばねの全質量は$m_s=\rho l$と表せる。また固定端からξの位置における微小部分$d\xi$の質量は$\rho d\xi$となる。質点mの平衡点からの変位をxとし、微小部分$d\xi$の変位が固定端からの長さに比例するものとすると、変位は$(\xi/l)x$とおくことができる。これより系の運動エネルギーが求まり、その式の形から等価質量を求めることができる。この方法をレイリー法（エネルギー法）とよんでいる。

第1－5節　フーリエ変換

学習のポイント
　フーリエ級数およびフーリエ変換の基礎概念を理解する。

1－5－1　フーリエ級数

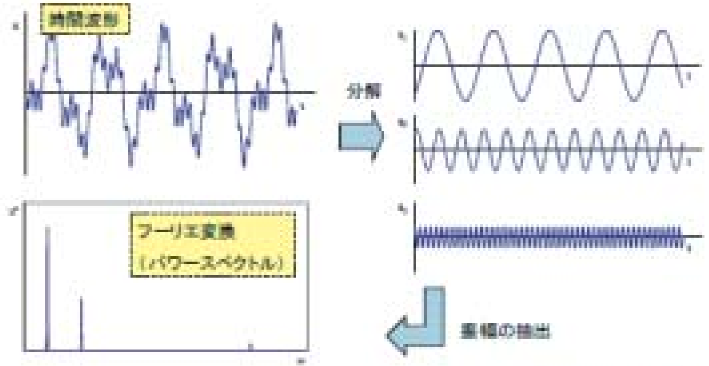
1－5－2　複素フーリエ級数

1－5－3　フーリエ変換

【節全体のポイント】
周波数領域における解析への導入として、フーリエ級数およびフーリエ変換の基礎概念を理解させる。

【節全体の解説】
　波形解析の基礎として、フーリエ級数およびフーリエ変換の基礎概念を理解させる。
　(1) フーリエ級数により任意の周期関数が調和関数の重ね合わせで表現できることを示す。
　(2) フーリエ級数を非周期な場合に拡張するとフーリエ変換が導かれることを示す。
　(3) フーリエ変換およびフーリエ逆変換について、時間領域と周波数領域の対応関係を理解させる。

フーリエ変換

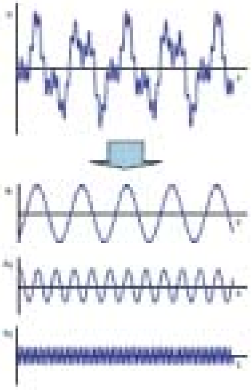


【テキストP46参照】

【ポイント】
　時間領域の波形を周波数成分に分解することをフーリエ変換という。

【解説】
　周波数分析に利用されるFFTは時間領域の波形を周波数成分に分解する。時間波形をフーリエ変換すると周波数成分に分解することができる。ただしフーリエ変換は複素数となるので、この振幅を2乗したパワースペクトルがよく用いられる。

1－5－1　フーリエ級数



フーリエ級数展開

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

フーリエ係数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos n\omega t\,dt\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin n\omega t\,dt\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

【テキストP46～P47参照】

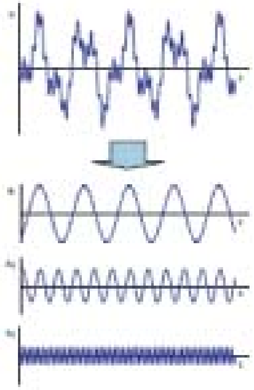
【ポイント】

任意の周期関数は調和関数（正弦関数、余弦関数）の重ね合わせで表すことができる。

【解説】

周期Tの周期関数は基本周波数（1／T）ずつ離れた正弦関数と余弦関数で展開できる。これをフーリエ級数といい、この係数をフーリエ係数という。

1－5－2　複素フーリエ級数



フーリエ級数

＋ オイラーの公式　$e^{jx}=\cos x+j\sin x$

複素フーリエ級数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n e^{jn\omega t}$$

複素フーリエ係数

$$X_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jn\omega t}\,dt\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

【テキストP46～P47参照】

【ポイント】

フーリエ級数を複素数表現したものを複素フーリエ級数という。

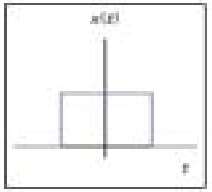
【解説】

フーリエ級数にオイラーの公式を適用して複素数表現したものを複素フーリエ級数とよんでいる。このフーリエ係数も複素数となり、絶対値を2乗したものをパワースペクトルとよんでいる。

1－5－3　フーリエ変換

フーリエ変換

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$



フーリエ逆変換

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

【テキストP48－P49参照】

【ポイント】

非周期関数を周波数成分に展開するものをフーリエ変換という。

【解説】

非周期関数はフーリエ級数に展開することはできないが、周期を無限大と考えると非周期関数も無限周期をもった周期関数とみなすことができる。この時間領域の関数x(t)から周波数領域の関数X(ω)への変換をフーリエ変換といい、また逆に周波数領域の関数X(ω)から時間領域の関数x(t)への変換をフーリエ逆変換とよんでいる。

フーリエ級数の展開周波数は基本周波数ずつ離れた離散的なものとなるが、フーリエ変換の展開周波数は実数全域となり連続的なものとなる。ここで非周期関数をフーリエ変換した場合は連続スペクトルとなるが、周期関数をフーリエ変換すると離散スペクトル（インパルス列）となる。

第6節　振動現象の測定

学習のポイント

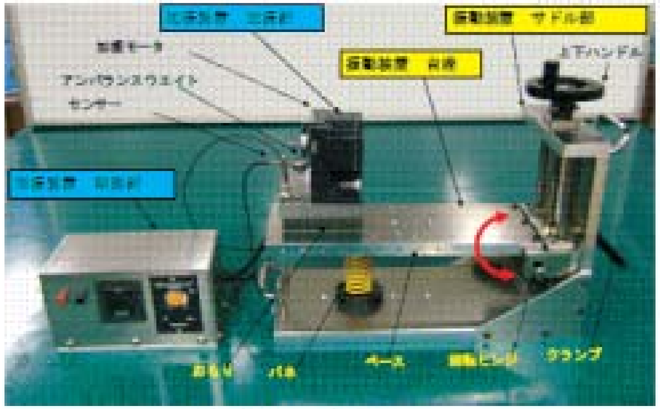
振動実験を通じて、インパルス応答や周波数応答などの基本的な振動現象を観察し、理解すること、さらに振動現象の背景にある原理や法則の理解を深めるために、実験装置の数学モデルを作成し、理論的な解析を行い、振動現象と比較検討する。

【節全体のポイント】

自由度1の振動実験装置を用いて、振動系のモデル化による理論解析と実験による振動現象の測定から、振動現象の背景にある原理・法則を理解させる。

【節全体解説】

はじめに実験装置の振動パラメータを測定し、そのデータをもとに振動モデルを作成し、理論解析を行う。そして、その結果と実際のインパルス応答および周波数応答の実験から得られた結果とを比較検討を行い、振動現象の理解を深める。



振動現象の実験装置

【テキストP50参照】

【ポイント】

実験装置全体の構成を知り、さらに振動装置の機構と加振装置の方法を理解させる。

【解説】

実験装置の特徴

・振動装置は、回転ヒンジを用いた1次の回転振動の振動系であること。

・加振装置は、モータ軸に取り付けられたアンバランス円盤で加振を行っていること。

モータの回転数は100～2000min^{-1}、加振範囲（3Hz～33Hz）。

・加振装置のアンバランス位置の検出のため、接近センサーが取り付けてあること。

これにより、加振力に対する位相差が測定できること。

①台座の振動パラメータの測定と算出
・台座の慣性モーメントの算出
・ばね定数および台座の静剛性の測定

↓

②台座のモデル化と振動解析

↓

③台座のインパルス応答の測定
・台座の固有振動数の測定値と理論値の比較

↓

④振動（質量・剛性）パラメータの影響
・インパルスの応答の測定と理論値との比較

↓

⑤実験装置の周波数応答の測定
・理論解析と測定値との比較

振動現象の実験の流れ

【テキストP51参照】

【ポイント】

実験の流れと実験概要を示す。

【解説】

<u>実験の流れ</u>

振動パラメータ測定--->振動系のモデル化と解析--->振動現象の測定（インパルス応答、周波数応答）--->理論値との比較

台座の振動パラメータの測定と解析の手順

1) 台座の構成部材の質量ならびに形状測定　（テキストP53参照）

2) 台座の慣性モーメント算出　（テキストP53参照）

3) ばね定数と静剛性の測定
- ・ばね定数の測定手順　（テキストP55参照）
- ・静剛性の測定手順　（テキストP57参照）
- ・静剛性の測定値と理論値との比較

4) 台座のモデル化と振動解析　（テキストP59参照）

【テキストP53～P59参照】

【ポイント】
台座の振動パラメータの測定と解析の大まかな手順を説明する。

【解説】
実験装置の振動減衰は小さいので、振動パラメータから減衰係数は除く。

実験装置のモデル化の条件

1) ばね以外の部材は、剛体と見なす。
2) 振動に伴う台座の変位角または変位は非常に小さいものとする。
3) 台座のベース以外の部材は、質点系として扱う。

【テキストP51参照】

【ポイント】
実験装置のモデル化と解析を行う上での条件について説明する。

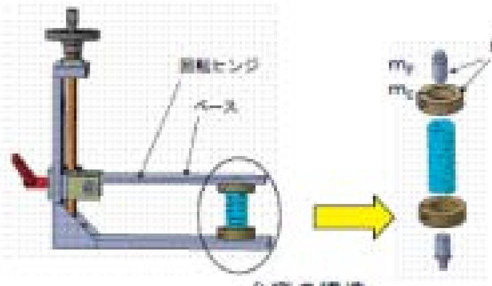
【解説】
なし

台座の振動パラメータの測定

(1)質量・形状の測定と慣性モーメントの算出

台座の慣性モーメント ＝ ベースの慣性モーメント ＋ ばねの取り付け治具の慣性モーメント

＊剛体と見なす　＊質点系として扱う



台座の構造

【テキストP51参照】

【ポイント】

・台座の構造を説明する。

・台座の慣性モーメント算出方法の説明をする。

【解説】

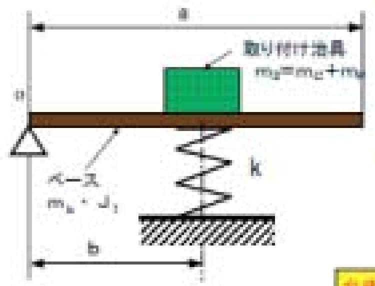
台座の構成部材の取り扱い

・実験装置の解析では簡単にするため、小さい取り付け治具は、質点系とみなし、大きなベースについては剛体として取り扱う。

・ベースのヒンジピン、ばねの慣性モーメントは無視する。

・ベースは、取り付け用の穴が多数開いているが、直方体の板として取り扱う。

台座の慣性モーメントの算出



台座のモデル

ベースの慣性モーメント J_1

$$J_1 = I_G + m_b\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}m_b a^2 + \frac{1}{4}m_b a^2 = \frac{1}{3}m_b a^2$$

取り付け治具の慣性モーメント J_2

$$J_2 = m_2 \cdot b^2$$

台座の慣性モーメント J_D

$$J_D = J_1 + J_2$$

【テキストP53参照】

【ポイント】

剛体の慣性モーメントの算出方法と質点計の慣性モーメント算出方法の説明する。

【解説】

・重心以外の位置を回転中心とした場合の剛体の慣性モーメントJ

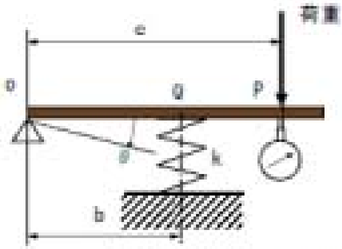
$J=I_G+mL^2$

I_G:重心位置の慣性モーメント　m:剛体質量　L:重心から回転中心までの距離

・質点系の慣性モーメント J

$J=mL^2$　　m:質量　L:質点から回転中心までの距離

台座の静剛性とばね定数の関係



P点（荷重点）変位

$$x_p = c \cdot \tan\theta = c \cdot \theta$$

Q点変位

$$x_Q = b \cdot \tan\theta = b \cdot \theta = \frac{b}{c} x_p$$

・モーメントの釣り合いから

$$k \cdot x_Q \cdot b - P \cdot c = 0$$

P点の静剛性

$$k_p = \frac{P}{x_p} = k\frac{b^2}{c^2}$$

なお、b=c の時　$k_p = k$　静剛性＝ばね定数

【テキストP54参照】

【ポイント】

台座の任意の点の静剛性の算出方法を理解させる。

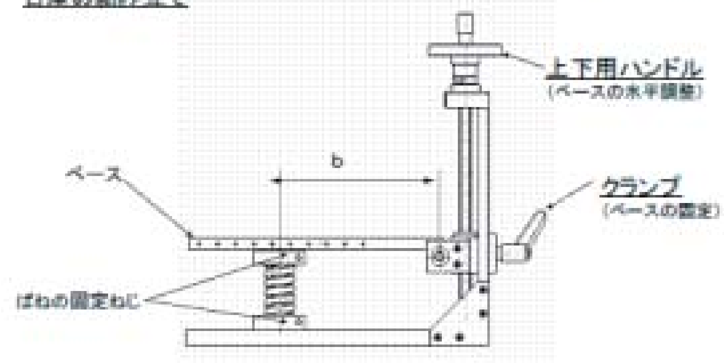
静剛性とばね定数の関係を示す。

【解説】

・静剛性とばね定数の関係を求めるために、振動に伴う台座の変位角 θ は小さいものと仮定し、tan θ = θ で近似している。

ばね定数の測定実験

台座の組み立て



注意　台座は、剛性の高い台の上に設置すること。

【テキストP55参照】

【ポイント】

組み立て方法を説明する。

【解説】

なし

ばね定数の測定
（ばね位置と荷重点が一致）

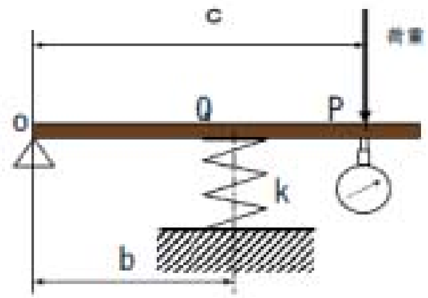
【テキストP55参照】

【ポイント】
ばね定数の測定方法手順を理解させる。

【解説】
詳細の手順は、テキストP55参照のこと。

測定での注意点
- 台座のベースを水平になるように固定こと。
- ばねの中心位置と重りの重心が一致するように台座に重りを順次載せる。
- 変位測定用レバーは、取り付けが緩みやすいので、しっかり固定すること。
- ばねの固定用治具は、締め付けの状態が弱いと、変位が変化するのでしっかり固定すること。

静剛性の測定実験

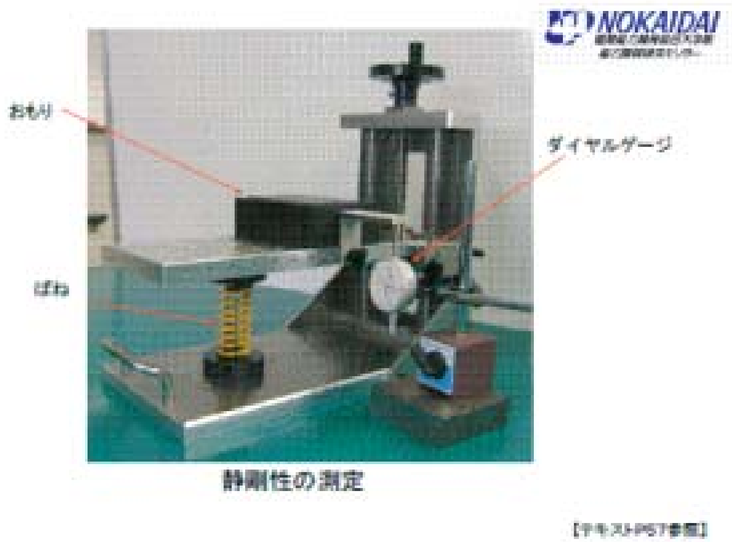


静剛性の測定系モデル

【テキストP57参照】

【ポイント】
静剛性とばね定数の違いを説明する。

【解説】
なし



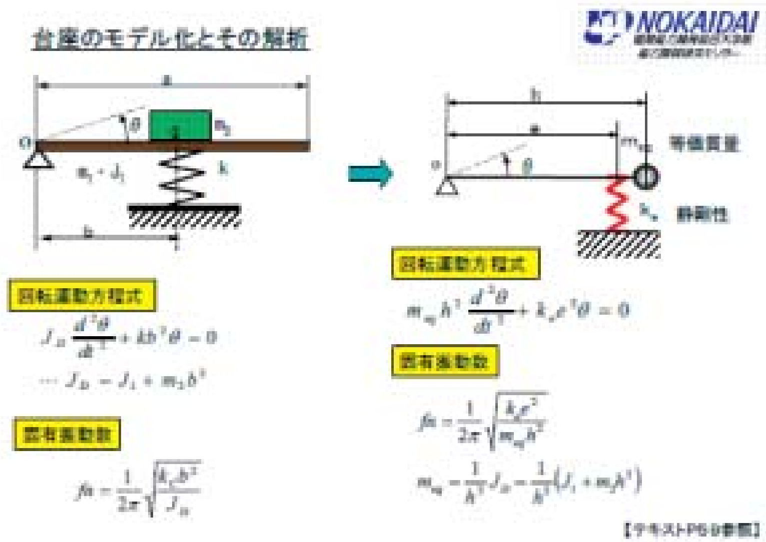
【ポイント】

静剛性の測定方法の手順を理解させる。

静剛性の測定は、重りを載せる位置がことなるだけで、前述のばね定数の測定と同様。

【解説】

なし



【ポイント】

・図左……台座の回転振動モデル化。

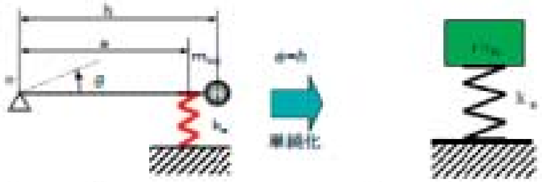
・図右……台座の回転振動モデルの単純化。

（台座の等価質量と静剛性を用いて表した場合）

【解説】

なし

台座のモデル化



回転運動

$$fn = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_s a^2}{m_{eq} h^2}}$$

$$m_{eq} = \frac{1}{h^2} J_O = \frac{1}{h^2}\left(J_1 + m_2 h^2\right)$$

並進運動

$$fn = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_s}{m_{eq}}}$$

$$m_{eq} = \frac{1}{h^2} J_O = \frac{1}{3} m_1 \left(\frac{a}{h}\right)^2 + m_2$$

【テキストP59参照】

【ポイント】

回転振動系モデルを並進運動系のモデルに変換した場合の等価質量と固有振動数を理解させる。

【解説】

図左の回転振動系モデルの回転中心から等価質量までの距離hをばねまでの距離aに一致するようにとれば並進運動系のモデルに変更できる。

台座のインパルス応答の測定と評価

インパルス応答よる固有振動数の測定　（テキストP61－P63参照）

1）台座のインパルス応答の測定
2）台座に重りを載せた場合のインパルス応答の測定
3）台座のばねを変更した場合のインパルス応答の測定

⇩

各振動系の振動モデルによる理論固有振動数と測定された固有振動数比較

【テキストP61－P64参照】

【ポイント】

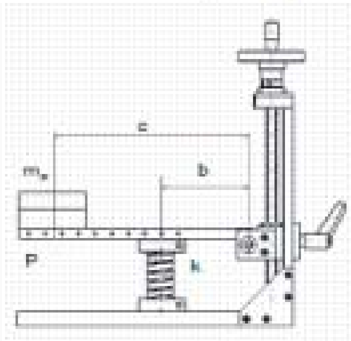
台座のインパルス応答の測定実験の概要の説明をする。

【解説】

なし

(重り＋台座)の固有振動数の求め方

$$f_e = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_p \cdot c^2}{J_D + m_p \cdot c^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k \cdot b^2}{J_D + m_p \cdot c^2}}$$



P点の静剛性

$$k_p = k\frac{b^2}{c^2}$$

k_p:P点の静剛性
k: ばね定数
J_D: 台座の慣性モーメント

【テキストP63参照】

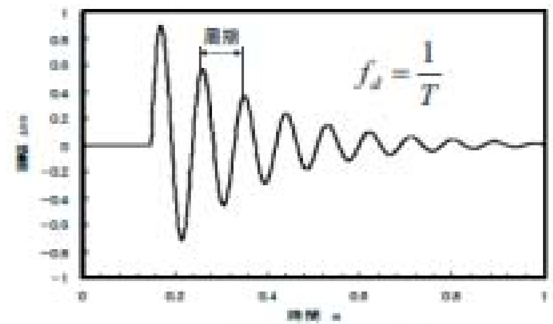
【ポイント】

ばね定数および重りを任意位置に設置した場合の固有振動数を示す。
台座の固有振動数は、$m_p=0$の場合となる。

【解説】

なし

台座のインパルス応答の測定



インパルス応答の出力波形

【テキストP60－P61参照】

【ポイント】

インパルス応答の出力波形から固有振動数の算出法を理解させる。
周期Tと固有振動数f_dの関係。$f_d=1/T$

【解説】

なし

台座のインパルス応答の測定装置

【テキストP60参照】

【ポイント】

・台座にインパルス応答の測定に必要な測定機器を説明する。
（実験装置、振動計、デジタルオシロスコープ）

・台座のインパルス応答の測定法手順を知る。

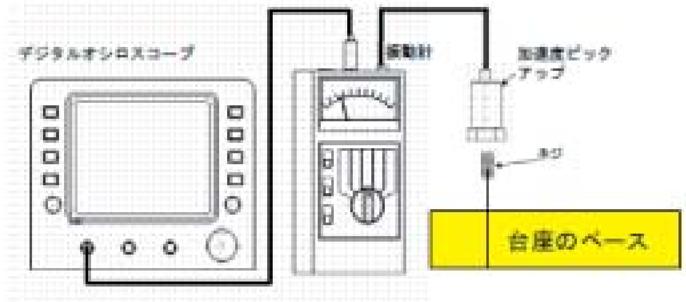
注意点　振動計の測定モード：変位

デジタルオシロスコープ：Normalモードまたはシングルモード

加振ハンマー：ゴム製のハンマーを使用

【解説】

測定手順は、テキストP61参照のこと。



振動計の配線（インパルス応答）

【テキストP61参照】

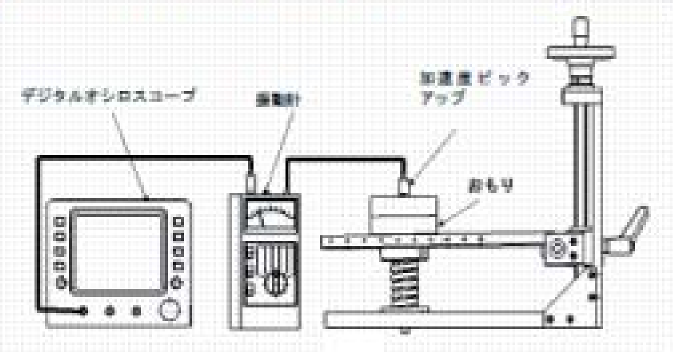
【ポイント】

加速度ピックアップ、振動計、デジタルオシロスコープの配線の理解させる。
加速度ピックアップのベースへの固定方法を示す。

【解説】

なし

振動パラメータ変化させた場合の実験装置



振動計の配線図

【テキストP65参照】

【ポイント】
台座に重りを追加した場合の測定系を理解させる。

【解説】
なし

周波数応答の測定手順

1）振動パラメータの測定　（テキストP69）
-各部材の質量、取り付け位置から慣性モーメント算出
-静剛性の測定

2）アンバランス量の測定　（テキストP70参照）

3）周波数応答の測定　（テキストP71～P72参照）

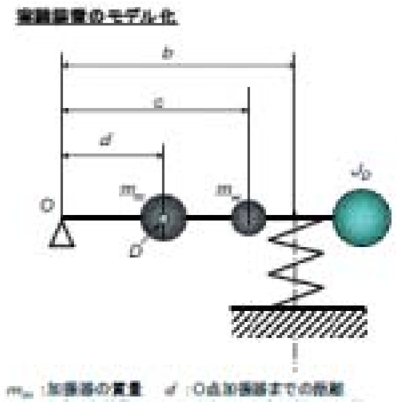
4）インパルス応答測定

【テキストP68～P73参照】

【ポイント】
台座の周波数応答の測定手順を説明する。

【解説】
なし

実験装置のモデル化



m_e :加振器の質量　d :O点加振器までの距離
m_w :おもりの質量　c :O点からおもりまでの距離
J_D :台座の慣性モーメント
b :O点からばねまでの距離　k :ばね定数

振動系の慣性モーメント J_t

$$J_t = m_e d^2 + m_w c^2 + J_D$$

振動系の運動方程式

$$J_t \frac{d^2\theta}{dt^2} + kb^2\theta = 0$$

固有振動数

$$fn = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k \cdot b^2}{m_e \cdot d^2 + m_w \cdot c^2 + J_D}}$$

また、D点の静剛性 k_d で示すと

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_d}{M_d}}$$

$$k_d = k(b/d)^2$$

$$M_d = m_e + m_w (c/d)^2 + J_D/d^2$$

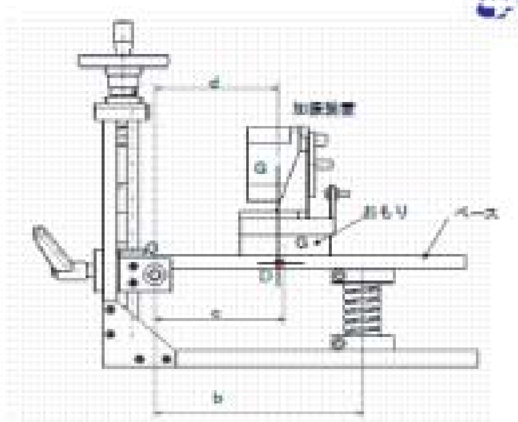
【テキストP68参照】

【ポイント】

台座に重りと加振器を載せた場合の実験装置のモデル化の説明する。

モデルに基づいて求めた固有振動数の算出方法説明する。

【解説】なし



周波数応答の実験装置

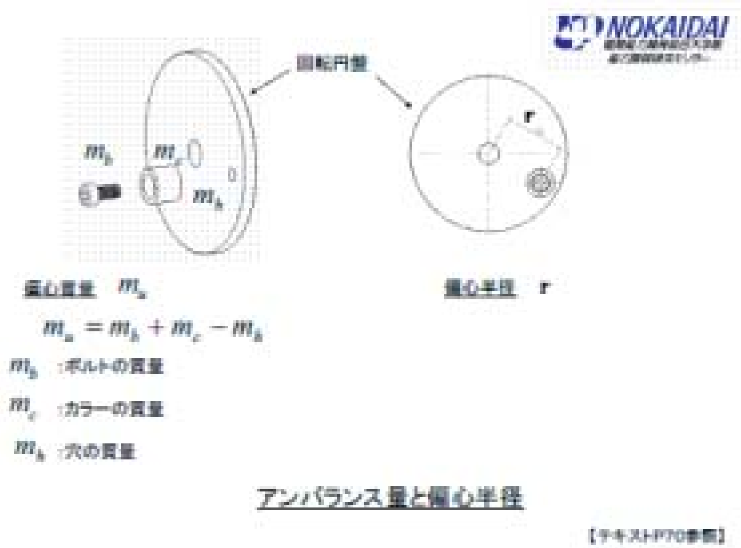
【テキストP69参照】

【ポイント】

周波数応答の振動装置の構成と記号の説明をする。

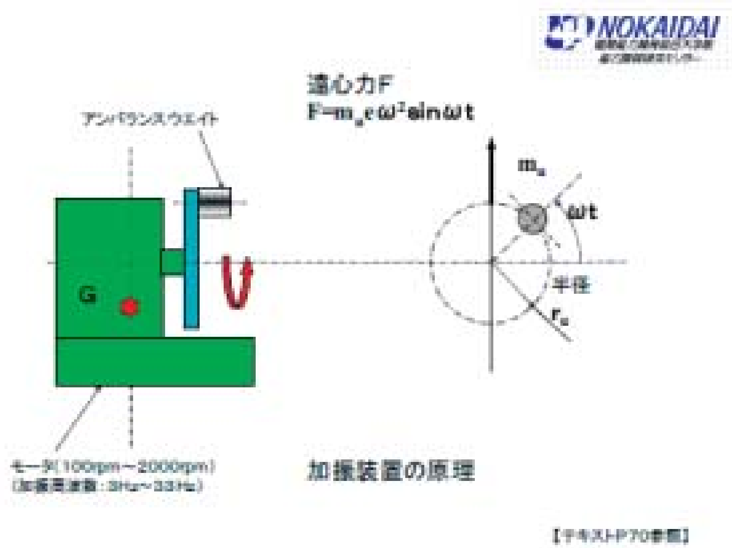
【解説】

重り4枚（加振装置取り付け用タップがある重り1枚、追加用重り3枚）



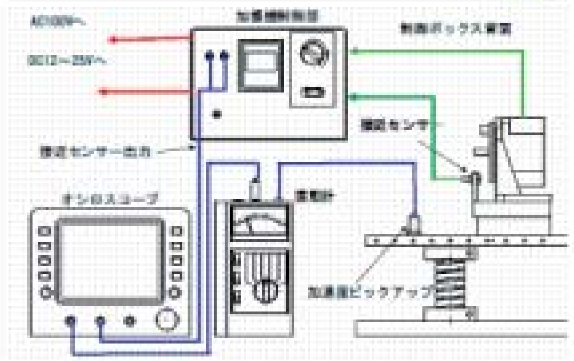
【ポイント】
アンバランス量と偏心半径の測定と算出。

【解説】
なし



【ポイント】
加振装置の加振原理を理解させ、加振力の求めかたを説明する。

【解説】なし



振動装置の周波数応答実験の測定装置と配線

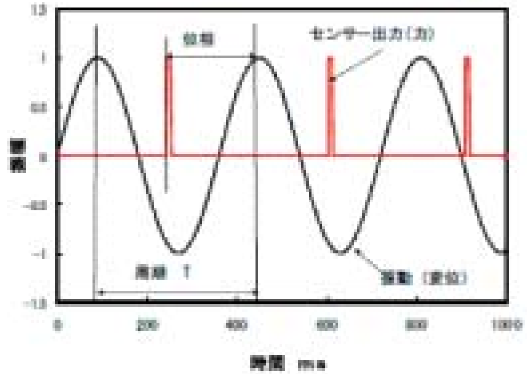
【テキストP71参照】

【ポイント】

振動装置の周波数応答実験の測定装置ならびに配線を理解させる。

【解説】

台座の振幅を加速度ピックアップで、アンバランスウエイトの位置を接近センサーで測定している。



デジタルオシロスコープの出力波形

【テキストP72参照】

【ポイント】

バランスウエイトの位置と台座の振幅から位相差が測定できることを理解させる。

【解説】

なし

測定値の整理

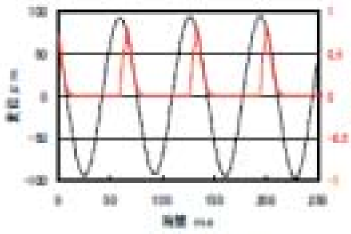
アンバランス量　m_u=＿＿＿kg　　偏心半径　r_u=＿＿＿m

測定値	回転数　n　min^{-1}				・・・・		
	振幅（変位）A_m　μm				・・・・		
	周期（変位）T　[s]				・・・・		
	位相　δ　[s]						
計算値	角速度　ω　[rad/s]						
	遠心力　F_u　[N]						
	コンプライアンスC_m [μm/N]						
	位相　φ　[度]						

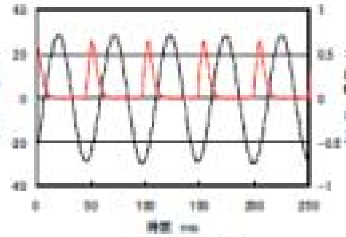
【テキストP73参照】

【ポイント】
実験で測定値の種類とその単位を理解する。
測定値から角速度、遠心力、コンプライアンス、位相の計算方法を理解する。

【解説】
なし



出力波形
（固有振動数以下）



出力波形
（固有振動数以上）

【テキストP72参照】

【ポイント】
振動装置の固有振動数の前後の加振周波数で、位相が変化することを理解させる。
固有振動数以下加振周波数では、振幅波形と加振力波形が同位相。
固有振動数以上加振周波数では、振幅波形と加振力波形が反対位相。

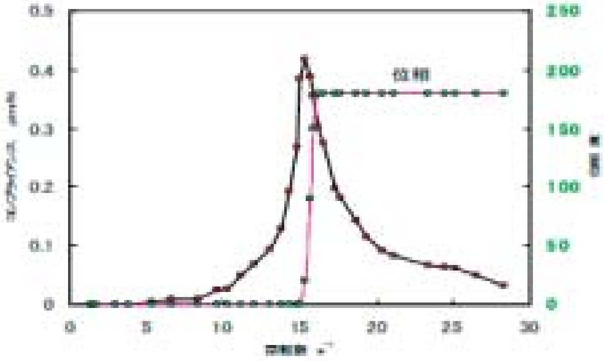
【解説】
なし

算出法

・回転数	$N = n/60$	$[s^{-1}]$
・周期	$T = 1/N$	[s]
・角速度	$\omega = 2 \cdot \pi \cdot N$	[rad/s]
・遠心力	$F_u = m_u \cdot r_u \cdot \omega^2$	[N]
・コンプライアンス	$C_m = A_m / F_u$	[μm/N]
・位相	$\psi = 360(\delta / T)$	[度]

【テキストP73参照】

【ポイント】
測定したデータからコンプライアンスと位相の算出方法を説明する。
【解説】
なし



周波数応答(コンプライアンスと位相)

【テキストP73参照】

【ポイント】
実験データの整理を理解する。
【解説】なし