付　　録

A．数学

A－１　数と式の計算

（１）計算順序

＋，－，×，÷混合計算では×，÷は先に計算し，＋，－は後に計算します。（　）がある場合には，（　）内を先に計算する。

（２）少数の計算

①小数の加減算は，小数点をそろえて計算する。

②　小数の乗算は，小数点がないものとして整数と同じように計算し，積の小数点以下の桁数を，かけられる数と，かける数の小数点以下の桁数の和と同じにする。

（３）分数の計算

①分数の加減算は，最小公倍数を見つけて通分して計算する。

②分数の乗算は，仮分数になおして分子は分子と，分母は分母とかけ算する。

③分数の除算は，割る数の逆数をかけて計算する。

（４）繁分数

分数の分母や分子がさらに分数になっている式を繁分数という。

（５）展開とは

単項式や多項式の積の形の式を，かっこをはずして単項式の和の形に表すことを，はじめの式を展開するという。

（６）因数分解とは

多項式をいくつかの因数の積として表すことを，その多項式を因数分解するという。

（７）平方根

①2 乗すると a になる数を，a の平方根という。

②乗法の計算は，次のように行う。　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

③除法の計算は，次のように行う。$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

④$\sqrt{\ }$の外の数を$\sqrt{\ }$の中に入れる場合には次のように計算する。 $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

（８）複素数とは

平方すると-1 になる新しい数を１つ考えて、これを文字 i で表し、虚数単位という。すなわち$\mathrm{i}^2=-1$である。２つの実数 a、b を用いて$\mathrm{a}+\mathrm{bi}$と表される数を複素数という。

複素数の基本式は次のとおりである。

$$(\mathrm{a}+\mathrm{bi})+(\mathrm{c}+\mathrm{di})=(\mathrm{a}+\mathrm{c})+(\mathrm{b}+\mathrm{d})\mathrm{i}$$
$$(\mathrm{a}+\mathrm{bi})-(\mathrm{c}+\mathrm{di})=(\mathrm{a}-\mathrm{c})+(\mathrm{b}-\mathrm{d})\mathrm{i}$$
$$(\mathrm{a}+\mathrm{bi})(\mathrm{c}+\mathrm{di})=(\mathrm{ac}-\mathrm{bd})+(\mathrm{bc}+\mathrm{ad})\mathrm{i}$$
$$\frac{\mathrm{a}+\mathrm{bi}}{\mathrm{c}+\mathrm{di}}=\frac{\mathrm{ac}+\mathrm{bd}}{\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2}+\frac{\mathrm{bc}-\mathrm{ad}}{\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2}\mathrm{i}$$

（９）連立方程式

① 2 元 1 次方程式とは 2x－3y＝3 のように，2 つの文字を含む 1 次方程式を 2 元 1 次方程式という。

② 次の式のように，2 元 1 次方程式が連立している方程式を連立（2 元 1 次）方程式という。

$$\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 4y-y=-8 \end{cases}$$

（１０）高次方程式

未知数 x について整理したとき、$2\mathrm{x}+1=0$（１次方程式)、$\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+2=0$（２次方程式)、

$\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+2=0$（３次方程式）などのように、左辺が未知数について整式になる方程式を整方程式という。とくに、3 次以上の整方程式を高次方程式という。

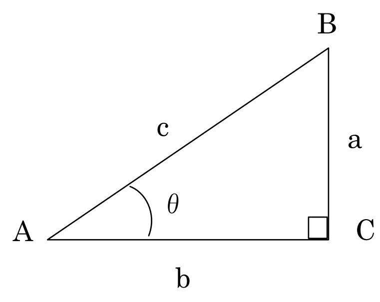
Ａ－２　三角関数

（１）三角比

右図の直角三角形において、各辺の３つの比の値

を角 θ の三角比という。

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}},\quad \cos\theta=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}},\quad \tan\theta=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$



（２）三角関数

$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ は、いずれも一般角（負の無限大から、正の無限大まで考えた角度）θの関数である。これらをまとめて、θの三角関数という。

（３）三角関数の相互関係

1　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

3　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

（４）三角関数のグラフ

図 A-１、A-２に示すように、$y = \cos x$ は $y = \sin x$ のグラフを x 軸の方向に $-90°(\frac{\pi}{2} \fallingdotseq 1.57[\mathrm{rad}])$ 平行移動したグラフになっている。グラフより sinx と cosx は 360°（2π≒6.28[rad]）を周期とする関数、tanx は 180°（π≒3.14[rad]）を周期とする関数であることがわかる。

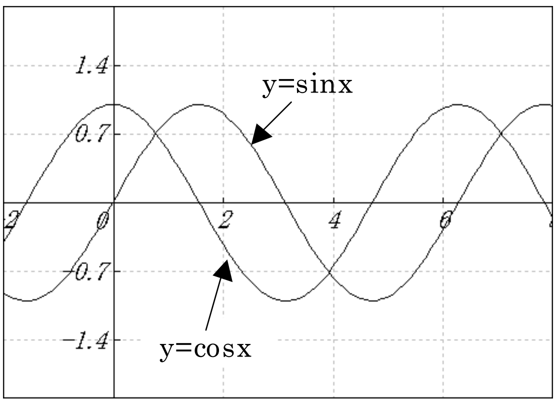


図 A-１　sinx と cosx のグラフ

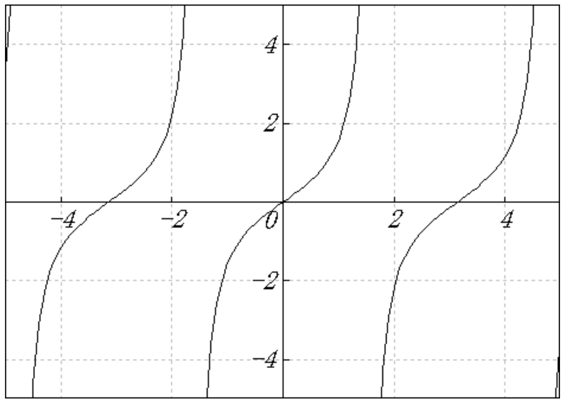


図 A-２　tanx のグラフ

（５）加法定理

1　$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\phi \end{cases}$

2　$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$

3　$\begin{cases} \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$

Ａ－３　指数関数

（１）指数

a^n の形をした数または式を、a の累乗といい、n をその指数という。

$a \neq 0$ で、n は正の整数のとき

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$ となる。

（２）指数法則

$a \neq 0, b \neq 0$ で m、n を整数とすると

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$ となる。

（３）累乗根の公式

$a > 0, b > 0$ で、m、n、p を正の整数とすると

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$ となる。

（４）指数関数

$a > 0, a \neq 1$ とするとき、$y = a^x$ は x の関数で、この関数を a を底とする指数関数という。

（５）指数関数 $y = a^x$ の性質

①　定義域は実数の全体で、値域は正の数の全体である。

②　$a > 1$ ならば、単調に増加する。

③　$0 < a < 1$ ならば、単調に減少する。

Ａ－４　対数関数

（１）対数と指数の関係

対数と指数について、次の関係がある。　$r = \log_a P \iff a^r = p$

（２）対数関数

$a > 0, a \neq 1$ とするとき、$y = \log_a x$ は x の関数で、この関数を a を底とする対数関数という。

（３）対数の性質

$$log_a PQ = log_a P + log_a Q, \quad log_a \frac{P}{Q} = log_a P - log_a Q, \quad log_a P^t = t\,log_a P$$

（４）底の変換公式

$$\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$$

（５）対数関数 $y = \log_a x$ の性質

①定義域は実数の全体で、値域は正の数の全体である。

② $a>1$ ならば、単調に増加する。

③ $0<a<1$ ならば、単調に減少する。

Ａ－５　関数の極限と微分

（１）極限値

関数 $f(x)$ において、x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ がある一定値 α に限りなく近づく場合 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ または $x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ この値 α を、$f(x)$ の極限値と言いう。

（２）平均変化率と微分係数

関数 $f(x)$ において、x の値が a から b まで、$b-a$ だけ変化すると、$f(x)$ の値は、$f(a)$ から $f(b)$ まで、$f(b)-f(a)$ だけ変化する。このとき、x の値の変化に対する $f(x)$ の値の変化の割合は、次のようになる。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

上式は、x が a から b まで変化するときの、関数 $f(x)$ の平均変化率という。上式において、a の値を定め、b を a に限りなく近づけるとき、ある一定の値 α に限りなく近づく場合、この値 α を、関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数といい、記号 $f'(a)$ で表す。

（３）導関数

関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ の値は、a の値に対応して定まる。そこで、a を変数 x で置き換えると、新しい $f'(x)$ が得られる。この関数 $f'(x)$ を、もとの関数 $f(x)$ の導関数という。関数 $f(x)$ の導関数は、次のように定義される。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを、関数 $f(x)$ を微分するという。

関数 $y=x^n$ の導関数は　$y'=nx^{n-1}$　となる。

Ａ－６　積分

（１）積分

関数 $f(x)$ に対して、微分すると $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分または原始関数という。

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を積分するという。ここで C は積分定数を表している。

（２） x^n の不定積分

x^n の不定積分は次のようになる。

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

（３）定積分の定義

関数 $f(x)$ の１つの不定積分を $F(x)$ とするとき、２つの実数 a、b に対して、

$F(b) - F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの定積分という。記号 $\int_a^b f(x)dx$ で表す。

（４）定積分の性質

① $\int_a^a f(x)dx = 0$

② $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

③ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

④ $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

⑤ $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ここで k は定数を表す。

（５）積分法と微分法

積分法と微分法の間には、次の関係が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

（６）定積分と面積

区間［a, b］において、関数 y=f(x)のグラフと x 軸に挟まれる部分の面積を S とすると、次のことが成り立つ。

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

区間［a,b］において、常に f(x)≧g(x)であるとき、この区間で、曲線 y=f(x)と y=g(x)に挟まれる部分の面積を S とすると、次のことが成り立つ。

Ａ－７　ベクトルの基本演算

（１）スカラーとベクトル

物理量には、質量、圧力など大きさだけを持つスカラー量と、速度、力など大きさと向きを持つベクトル量がある。

図 A-3 に示す有効線分の両端を P,Q とすると、このベクトルは $\overrightarrow{PQ}$ と表され、点 P を始点、点 Q を終点といい、線分 $\overline{PQ}$ の長さをベクトルの大きさまたは絶対値という。このベクトル量を記号的に表すには、**A**（肉太の文字）または矢印を付けた文字 $\overrightarrow{A}$ と書く。このベクトル量の大きさは $|\mathbf{A}|,|\overrightarrow{A}|$ と表す。

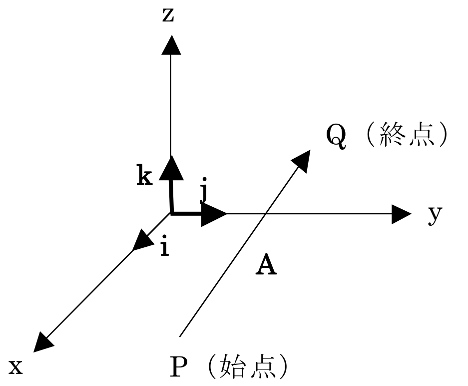


図 A-3 ベクトルの定

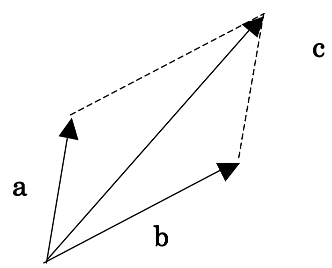


図 A-4　ベクトルの合成と分

ベクトルの合成と分解は図 A-4 に示すように、平行四辺形の法則を用いて求めることができる。このベクトル a を直交座標系 0-xyz の３つの軸方向に分解し、x 軸方向成分 a_x、y 軸方向成分 a_y、z 軸方向成分 a_z および各軸方向単位ベクトル **i**,**j**,**k** を用いると、次のように表すことができる。

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ と $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$ の合成は

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}+b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}=(a_x+b_x)\mathbf{i}+(a_y+b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k}$$

となる。

（２）ベクトルの内積と外積

２つのベクトルの a、b の大きさを$|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$とし、a、b のなす角を$\theta$とすると、内積$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$は$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$と定義される。これよりベクトル a、b の内積はスカラーであることがわかる。内積はスカラー積ともいわれる。

内積$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$を成分表示すれば、

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a}_x\mathbf{i} + \mathbf{a}_y\mathbf{j} + \mathbf{a}_z\mathbf{k})\cdot(\mathbf{b}_x\mathbf{i} + \mathbf{b}_y\mathbf{j} + \mathbf{b}_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

となる。

ベクトル a、b の外積$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$と定義される。外積$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$はベクトルであり、大きさは a、b を２辺とする平行四辺形の面積に等しく、また a、b に垂直で a から b へ右ねじをまわした向きに進む向きであるベクトルである。外積はベクトル積ともいわれる。

外積$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$を成分表示すれば

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\mathbf{a}_x\mathbf{i} + \mathbf{a}_y\mathbf{j} + \mathbf{a}_z\mathbf{k})\times(\mathbf{b}_x\mathbf{i} + \mathbf{b}_y\mathbf{j} + \mathbf{b}_z\mathbf{k}) =$$

$$(a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

である。

Ａ－８　偏微分

2 変数関数$z = f(x,y)$の y を定数とみなして、関数 z を x の１次関数と考え、これを x で微分した

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

を$z = f(x,y)$の x に関する偏導関数という。記号は次のように表す。

$$z_x,\quad f_x(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

与えられた関数$z = f(x,y)$からz_xを求めることを、関数 z を x で偏微分するという。

y に関する偏導関数は次のようになる。

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

記号は次のように表す。

$$z_y,\quad f_y(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ａ－９　微分方程式

変数、関数（従属変数）およびその導関数の間の関係を示す方程式を微分方程式という。

微分方程式を満足する変数と関数の関係を導関数を含まない形で見出すことを微分方程式を解くという。

次式は導関数を含んでいるので微分方程式である。

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad (A-1)$$

式(A-1)を解くためには、何らかの方法によって式(A-1)を満足する x と y の関係を導関数を含まない形で求める必要がある。そのために式(A-1)の両辺を積分すると

$$\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C \quad (\text{Cは積分定数})$$

となる。これが式(A-1)の解である。

上述の例は１次の導関数を含む簡単な例であったが、微分方程式によっては２次以上の導関数を含む場合があり、その微分方程式の中に含まれる次数のうち、最高の次数を階数という。

式(A-1)の場合は１階の微分方程式である。

n 階の常微分方程式で n 個の任意定数を含む解を一般解といい、その定数に特定な値を与えた解を特殊解あるいは特別解という。

微分方程式で使用される用語を下記に示す。

①常微分方程式：x（実数または複素数）の未知関数 y とその導関数 y’, y’’, …$y^{(n)}$ および独立変数 x を含む方程式すなわち常微分のみを含む方程式を常微分方程式という。

$$例：\quad \frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

②線形微分方程式：y, y’, y’’, …$y^{(n)}$ の１次式である常微分方程式を線形微分方程式という。

$$例：\frac{d^3y}{dx^3} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

ここで、P(x), Q(x), R(x)は x のみの関数または定数である。

③階数：微分方程式の中に含まれる次数のうち、最高の次数をその微分方程式の階数という。

$$例：\quad \frac{d^3y}{dx^3} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \cdots 3\text{階の常微分方程式}$$

④斉次と非斉次：n 階線形微分方程式

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = q(x)$$

において q(x)が恒等的に 0 のときを斉次（同次）といい、q(x)≠0 のとき非斉次（非同次）という。

$$\text{例：}\ M\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{dy}{dx} + ky = 0 \quad \cdots\text{斉次2階常微分方程式}$$

定数係数を持つ 2 階の線形常微分方程式の一般解を考える。a、b、c を定数とする同次微分方程式を下記に示す。

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \qquad (A-2)$$

式(A-2)は $x, \dot{x}, \ddot{x}$ の線形結合が時間ついて恒等的に 0 となることを示している。解 x は時間微分に対して関数の形が変化しないことが必要である。このような関数として指数関数があるので、式(A-2)の基本解を次のように仮定する。

$$x = Ae^{\lambda t} \qquad (A-3)$$

式(A-3)を式(A-2)に代入すると

$$aA\lambda^2 e^{\lambda t} + bA\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = Ae^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad (A-4)$$

となる。A=0 は自明な解であるので、式(A-3)が A≠0 のような解であるためには、

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad (A-5)$$

であればよい。式(A-5)の根を λ_1 と λ_2 とする。$e^{\lambda 1}$ と $e^{\lambda 2}$ を式(A-2)の基本解といい、これらの線形結合式(A-6)を式(A-2)の一般解という。

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (A-6)$$

ここで、A と B は初期条件から求まる。

Ａ－１０　行列と行列式

（１）行列

行列とは、実数の長方形配列である。行列を構成する一つ一つの数を、そのマトリックスの成分または要素という。成分の横の並びを行列の行といい、上から第 1 行、第 2 行、・・・、第 m 行という。また、成分の縦の並びを列といい、左から第 1 列、第 2 列、・・・、第 m 列という。第 i 行と第 j 列の交差する位置にある a_{ij} を行列の i 行 j 列成分という。行列は肉太の大文字（A、B、・・・）で表し、次のような形で記述する。

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A-7)$$

転置行列は、行と列を入れ換えたものであり、行列 A の転置行列は A^T と表す。1 列だけの行列を列行列（aj）、1 行だけの行列を行行列（bi）という。

$$\mathbf{a}_j = [a_{1j}, \cdots, a_{mj}]^T, j = 1, \cdots, n \qquad (A-8)$$

$$\mathbf{b}_i = [a_{i1}, \cdots, a_{in}], i = 1, \cdots, m \qquad (A-9)$$

正方行列は行と列の数が等しい行列である。対角行列は $a_{ij} = 0, i \neq j$ で、少なくとも 1 つゼロでない対角項をもった正方行列である。n×n の対角行列を次のように表す。

$$\mathbf{A} \equiv diag[a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}] \qquad (A-10)$$

I または In で表す n×n の単位行列は $a_{ii} = 1, i = 1, \cdots, n$ の対角行列である。　ヌルまたはゼロ行列は全ての i と j で $a_{ij}=0$ であり、**O** と表す。

２つの行列 A と B が同じ次元を持ち、全ての i と j に対して $a_{ij}=b_{ij}$ ならば、２つの行列は等しいと定義する。同じ次元を持つ２つの行列 A と B の和は同じ次元を持つ行列であり、次のように定義する。

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad (A-11)$$

ここで、すべての i と j に対して $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ である。同じ次元を有する２つの行列 A と B の差を次のように定義する。

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \qquad (A-12)$$

ここで、すべての i と j に対して $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ である。

A が m×p の行列、そして B が p×n の行列であり、以下のように書き表す。

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n] \qquad (A-13)$$

ここで、a_i^T, i=1, …, m は p 個の要素を持つ行ベクトルで b_i, i=1, …, n は p 個の要素を持つ列ベクトルである。２つの行列 A と B の積を m×n 行列として、次のように定義する。

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \qquad (A-14)$$

ここで

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m^T\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m^T\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m^T\mathbf{b}_n \end{bmatrix} \qquad (A-15)$$

もしくは $c_{ij}=\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_j$ である。2 つのベクトル $\mathbf{a}=[a_1, a_2, \cdots, a_p]^T$ と $\mathbf{b}=[b_1, b_2, \cdots, b_p]^T$ のスカラ積を次のように定義する。

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_pb_p \qquad (A-16)$$

最初の行列の列と２番目の行列の行が等しい時のみ２つの行列の積を定義することができる。定義から一般に

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \qquad (A-17)$$

であることが明らかである。

以下に示す式が成り立つ。

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \qquad (A-18)$$

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC} \qquad (A-19)$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \qquad (A-20)$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \qquad (A-21)$$

行列の行ランク（列ランク）は行列の１次独立な最大の行（列）の数で定義される。１次独立な行（列）からなる正方行列はフルランクを持ち、逆行列が存在し、A^{-1} で表す。そして、A と A^{-1} の間には

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad (A-22)$$

の関係がある。ここで、I は単位行列である。

（１）行列式

　正方行列 A に対して、以下の手順で計算されるスカラー量を行列 A の行列式といい、

$|\mathbf{A}|$ または detA で表す。

正方行列 A が２行２列の場合の行列式は次のようになる。

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (A-23)$$

正方行列 A が n 行 n 列の場合の行列式は次式を用いて計算する。

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} \qquad (A-24)$$

式(A-24)は A の１行めの要素 a_{1j} について展開した場合で示しているが、他の行あるいは列の要素について展開してもよい。ここで Dij は i 行 j 列の要素を除去してつくられる(n-1)(n-1)次元の行列の行列式を表す。

正方行列 A が３行３列の場合の行列式は次のようになる。

$$
|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \qquad (A-24)
$$

$$
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}
$$

Ａ－１１　テーラー展開とマクローリン展開

（１）テーラーの定理

テーラーの定理は関数 f(x)を n 次多項式に展開する際に用いられるものである。これは平均値の定理の考え方を一般化することにより、次の定理が得られる。

関数 y=f(x)が区間[a,b]で連続である。このとき開区間(a,b)で n 回まで微分可能なとき、次式を満たす c が 1 つは存在する。

$$
\mathrm{f}(\mathrm{b}) = \mathrm{f}(\mathrm{a}) + \mathrm{f}'(\mathrm{a})(\mathrm{b}-\mathrm{a}) + \frac{\mathrm{f}''(\mathrm{a})}{2!}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2 + \frac{\mathrm{f}^{(3)}(\mathrm{a})}{3!}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^3 + \cdots + \frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(\mathrm{c})}{(n-1)!}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^{n-1} + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(\mathrm{c})}{n!}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^n \qquad (\mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b}) \qquad (A-25)
$$

（２）テーラー展開

関数を n 次式にするためにテーラーの定理を考える。これにより $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n = 0$ となる x の範囲で関数を次のように展開することができる。

$$
\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(\mathrm{a}) + \mathrm{f}'(\mathrm{a})(x-\mathrm{a}) + \frac{\mathrm{f}''(\mathrm{a})}{2!}(x-\mathrm{a})^2 + \frac{\mathrm{f}^{(3)}(\mathrm{a})}{3!}(x-\mathrm{a})^3 + \cdots + \frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(\mathrm{a})}{(n-1)!}(x-\mathrm{a})^{n-1} + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(\mathrm{a})}{n!}(x-\mathrm{a})^n + \cdots \qquad (A-26)
$$

式(A-26)を関数 f(x)の x=a におけるテーラー展開という。

（３）マクローリン展開

関数 f(x)の a=0 におけるテーラー展開を求めると次式のようになる。

$$
\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}'(\mathrm{a})x + \frac{\mathrm{f}''(0)}{2!}x^2 + \frac{\mathrm{f}^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\mathrm{f}^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (A-27)
$$

この式をマクローリン展開という。また、この式をマクローリン級数ともいう。

Ａ－１２　複素指数関数と複素ベクトル

（１）複素指数関数

指数のべき乗の中に複素数を独立変数として含む関数を複素指数関数という。複素指数関数は次のように表される。

$$e^{z} = e^{a+jb} = e^{a}e^{jb} \qquad (A-28)$$

複素指数関数 e^{jx} はマクローリン展開を利用すると

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - \frac{jx^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{jx^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{jx^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + j\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \qquad (A-29) \\ &= \cos x + j\sin x \end{aligned}$$

となる。この変換式をオイラーの公式という。

式(A-29)の x を-x に置き換えると

$$e^{-jx} = \cos(-x) + j\sin(-x) = \cos x - j\sin x \qquad (A-30)$$

となる。式(A-29)と式(A-30)から

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad (A-31)$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \qquad (A-32)$$

と表される。

（２）複素ベクトル

ベクトルを構成する項が複素数であるものを複素ベクトルという。複素ベクトルを構成する複素数の全項を共役複素数に置き換えたベクトルを共役複素ベクトルという。2 次元複素ベクトル $\mathbf{b}$ の共役複素ベクトル $\overline{\mathbf{b}}$ は次のようになる。

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + jb_1 \\ a_2 + jb_2 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} a_1 - jb_1 \\ a_2 - jb_2 \end{bmatrix} \qquad (A-33)$$

複素ベクトルの大きさ $\|b\|$ は、複素ベクトルと共役複素ベクトルの内積の平方根で定義される。

$$\begin{aligned} \|b\| &= \sqrt{\mathbf{b}^{T}\overline{\mathbf{b}}} = \sqrt{\begin{bmatrix} a_1 + jb_1 & a_2 + jb_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 - jb_1 \\ a_2 - jb_2 \end{bmatrix}} \qquad (A-34) \\ &= \sqrt{(a_1 + jb_1)(a_1 - jb_1) + (a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2)} \end{aligned}$$

複素ベクトル自身の内積の平方根は

$$
\|b\| = \sqrt{\mathbf{b}^{T}\mathbf{b}} = \sqrt{\left[a_1 + jb_1 \quad a_2 + jb_2\right]\begin{bmatrix} a_1 + jb_1 \\ a_2 + jb_2 \end{bmatrix}}
$$

$$
= \sqrt{(a_1 + jb_1)(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2)(a_2 + jb_2)} = \sqrt{\left(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2\right) + 2j(a_1 b_1 + a_2 b_2)}
$$

（A－35）

となり、複素数になる。

Ｂ．参考資料　１章６節　実験結果

第６節振動現象の測定

［１章６節で用いた使用機器］

振動計：　㈱アカシ　型番 AVT-CZ　ユニバーサルメータ

加速度ピックアップ：　㈱アカシ　型番 V301T

実験用ばね：㈱ミスミ　コイルスプリング

軽荷重用(SWL40)　中荷重用(SWM40)　重荷重用(SWH40)

1-6-2　台座の振動パラメータの測定

(1)質量・形状の測定と慣性モーメントの算出

＊ばね位置　230mm 場合の測定例

a.ベース　t=0.02[m]　w=0.15[m]　a=0.36[m]　m_1=2.78[kg]

b.取り付け治具　m_2=0.42[kg]

c.回転中心 O 点からばねまでの距離　b=0.23［m］

d.ベースの O 点回りの慣性モーメント　J_1=0.12［kgm^2］

e.取り付け治具の慣性モーメント(ばねの位置で異なる)　J_2=0.022［kgm^2］

f.台座の慣性モーメント　$J_b=J_1+J_2$=0.142　［kgm^2］

(2)台座の静剛性の測定

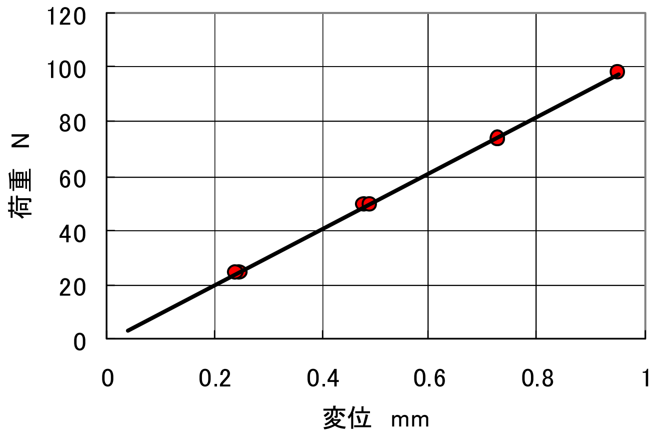
b.ばね定数の測定

＊ばね種類：中荷重用（赤）長さ 100ｍｍ　ばね取り付け位置　230mm 場合の測定例

測定位置（ｂ寸法）　230［mm］

増加→減少

荷重[N]	2.5×9.81	5×9.81	7.5×9.81	10×9.81	7.5×9.81	5×9.81	2.5×9.81
変位[mm]	0.25	0.48	0.73	0.95	0.73	0.49	0.24



ばね定数　103×10^3[N/m]

ばね変位と荷重の測定結果

c.静剛性の測定

①荷重位置　c =280[mm]　　ばね位置 b＝[230mm]

荷重[N]	2.5×9.81	5×9.81	7.5×9.81	10×9.81	7.5×9.81	5×9.81	2.5×9.81
変位[mm]	0.36	0.72	1.09	1.43	1.08	0.72	0.35

②荷重位置　c =230[mm]　　ばね位置 b＝[230mm]

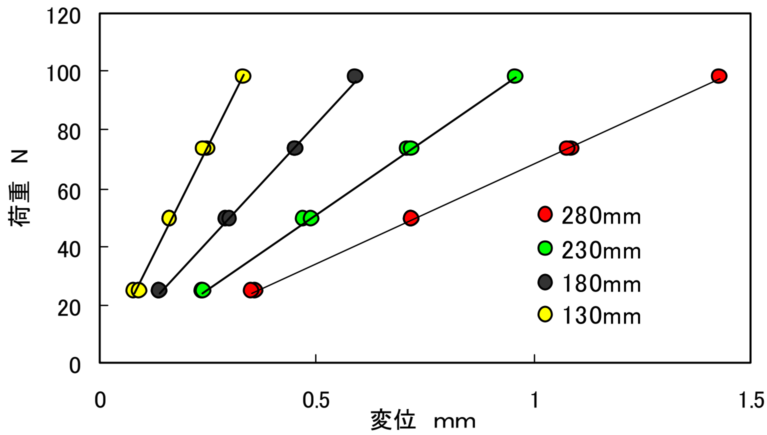
荷重[N]	2.5×9.81	5×9.81	7.5×9.81	10×9.81	7.5×9.81	5×9.81	2.5×9.81
変位[mm]	0.235	0.47	0.71	0.96	0.72	0.49	0.24

③荷重位置　c =180[mm]　　ばね位置 b＝230[mm]

荷重[N]	2.5×9.81	5×9.81	7.5×9.81	10×9.81	7.5×9.81	5×9.81	2.5×9.81
変位[mm]	0.14	0.29	0.45	0.59	0.45	0.30	0.14

④荷重位置　c =130[mm]　　ばね位置 b＝230[mm]

荷重[N]	2.5×9.81	5×9.81	7.5×9.81	10×9.81	7.5×9.81	5×9.81	2.5×9.81
変位[mm]	0.08	0.16	0.25	0.33	0.24	0.16	0.09



ばねの変位と荷重

	ばね定数	荷重位置 c	ばね位置 b	静剛性　[N/mm]	
	[N/mm]	[mm]	[mm]	測定値	理論値 k(b/c)2
①	100	130	230	300	313
②	103	180	230	165	168
③	103	230	230	103	103
④	103	280	230	68	69

1-6-4　台座のインパルス応答の測定

（１）台座のベースの固有振動数の測定

<u>測定例</u>

ばね位置　b=230[mm]

回数	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	平均値
周期 T[s]	0.035	0.033	0.034	0.035	0.035	0.0344

①固有振動数の測定値

ｆｄ＝29　[Hz]

②理論固有振動数

$$fd=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K\cdot b^2}{J}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1.03\times10^5\times0.23^2}{0.142}}=31.2[Hz]$$

ばね定数　k＝1.03×10^5 [N/m]　　台座の慣性モーメントＪ＝0.142[kgm^2]

1-6-5　振動パラメータの影響

(1) 質量パラメータの影響

測定例

ばね定数　k　〔中荷重用ばね 100mm〕：　2.3×10^5 [N/m]

ばねの位置　（ｂ寸法）　：　230　[mm]

荷重位置　（ｃ寸法）　：　230　[mm]

Ｐ点の静剛性　k_P　：　2.3×10^5 [N/m]

台座部の等価質量　m_{eqc}　：　2.68　[kg]

測定値と理論値の比較

おもりの質量　m_P　[kg]	2.5	5	7.5	10
測定周期　T　[ｓ]	0.0295	0.0395	0.0455	0.0515
測定固有振動数　fn=１/T　[Hz]	33.9	25.3	22.0	19.4
等価質量　$m_{epc}+m_P$　[kg]	5.2	7.7	10.2	12.7
理論固有振動　[kg]	33.5	27.5	23.9	21.4

(2) 剛性パラメータの影響

	ばね 種類	ばね 長さmm	荷重－変位の測定結果 2.5kg	5.0kg	7.5kg	10kg	ばね定数 N/mm
1	緑（重荷重用）	100	0.105mm	0.21 mm	0.32 mm	0.435mm	228
2	赤（中荷重用）	100	0.235mm	0.47 mm	0.71 mm	0.96 mm	103
3	青（低荷重用）	100	0.46 mm	0.93 mm	0.14 mm	1.89 mm	52.3
4	黄（極低荷重用）	100	0.92 mm	1.85 mm	2.85 mm	3.70 mm	26.3

測定例

ばねの位置　（ｂ寸法）　：　230　[mm]

荷重位置　（ｃ寸法）　：　230　[mm]

おもりの質量　m_p　：　5.0　[kg]

台座部の等価質量　m_{eqc}　：　2.68　[kg]

ばねの種類	緑 100	赤 100	青 100	黄 100
ばね定数　k　[N/mm]	228	103	52.3	26.3
測定周期　T　[ｓ]	0.0395	0.058	0.088	0.124
測定固有振動数　fn=１/T　[Hz]	33.9	25.3	22.0	19.4
理論固有振動　[Hz]	27.1	18.4	13.1	9.3

（３）荷重位置（ｃ）または、ばね位置（ｂ）の影響

使用ばねの種類　緑(重荷重用)長さ 100ｍｍ

ばね定数　：　228×10^3　[N/m]

J_D：台座部の慣性モーメント　：　0.142　[kgｍ^2]

荷重位置　ｃ寸法　[m]	130	155	180	230	255	280
おもりの質量ｍ$_p$　[kg]	5	5	5	5	5	5
ばねの位置　ｂ寸法　[m]	130	130	130	130	130	130
周期　T　[s]	0.049	0.055	0.061	0.0645	0.069	0.0717
測定固有振動数　[Hz]	20.4	18.2	16.4	15.5	14.5	13.9
推定静剛性　$k(b/c)^2$　[N/m]	228	160	119	73	59	49
等価質量　J_D/c^2+m_p　[kg]	8.4	5.9	4.4	2.7	2.2	1.8
理論固有振動数　[Hz]	20.8	19.3	17.9	15.5	14.5	13.5

1-6-6　周波数応答

（２）振動パラメータの測定

ａ.質量の測定

①加振装置の質量　m_m　4.52　[kg]　d=0.28[m]

②おもりの質量　m_P　2.16　[kg]　ｃ=0.28[m]

③台座の等価質量　$m_{eqd}=J_D/d^2=0.136/0.28^2=1.73$　[kg]

④D 点の総等価質量 $M_d=m_m+m_P(d/c)^2+m_{eqd}=4.52+2.16+1.73=8.41$　[kg]

b.静剛性の測定

①D 点の静剛性　$k_D=k(b/d)^2=2.28\times10^5(0.18/0.28)^2=0.942\times10^5$ [N/m]

ばねの種類　緑 100ｍｍ　　ばね定数　2.28×10⁵[N/m]　　ばね位置　b=0.18[m]

(3)固有振動数の推定

fm＝16.8　[Hz]

(4)アンバランス量の測定

b.アンバランスの回転質量

$m_u = m_b + m_c - m_h =$　3.4+9.8－0.9＝12.1　×10⁻³　　[kg]

mb：ボルトの質量　　3.4×10⁻³　[kg]

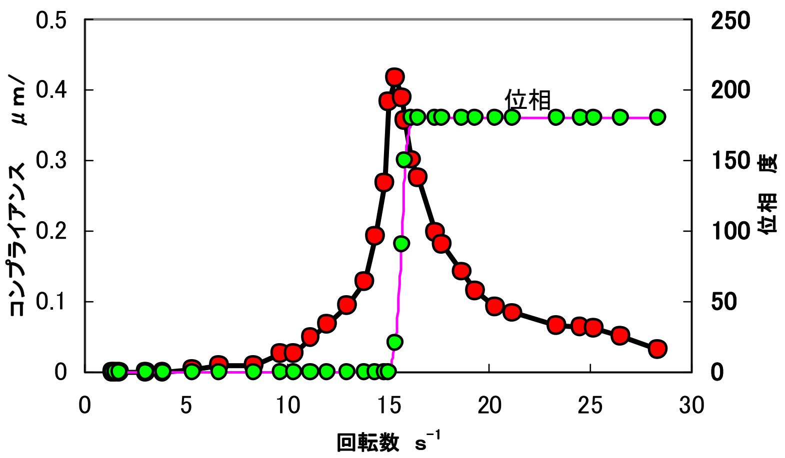
mc：カラーの質量　　9.8×10⁻³　[kg]

mk：穴の質量　　0.9×10⁻³　[kg]

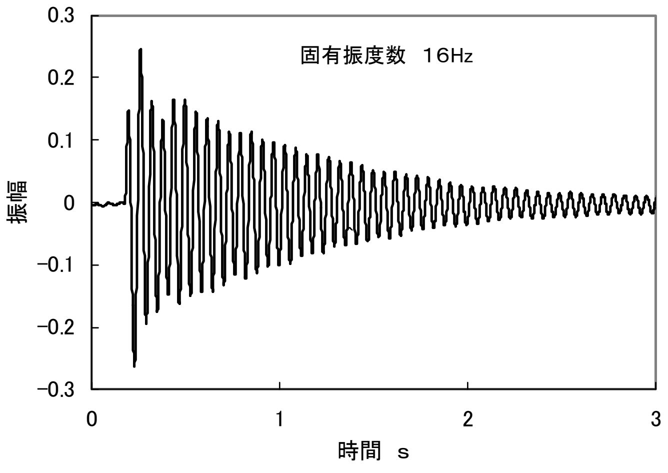
c.偏心半径　ru　　0.032　[m]

測定結果・まとめ

上記の条件での周波数応答の測定結果



周波数応答の測定結果



インパルス応答の測定結果

教材情報資料　Ｎｏ．114
応用短期課程モデル教材
— 振動実験及び振動解析を活用した機械設計技術 —

発　　　行	2006年　3 月
編集・発行人	職業能力開発総合大学校能力開発研究センター
	所　　長　重　　律　男
	〒229－1196 神奈川県相模原市橋本台４－１－１
	TEL（０４２）７６３－９０４６（普及促進室）
印　　　刷	電算印刷株式会社
	〒390－0821 長野県松本市筑摩１－１１－３０
	TEL（０２６３）２５－４３２９

ISSN 1340-2420

教材情報資料　No.114
2006

THE INSTITUTE OF RESEARCH AND DEVELOPMENT
POLYTECHNIC UNIVERSITY