第２節 振動現象の解析の流れと数値解析手法

4-2-1 振動解析の検討ステップ

図 4-2-1 に振動現象を解析しようとする場合の基本的ステップを示す。ここでの基本手順は、すべての解析検討でも言えることである。

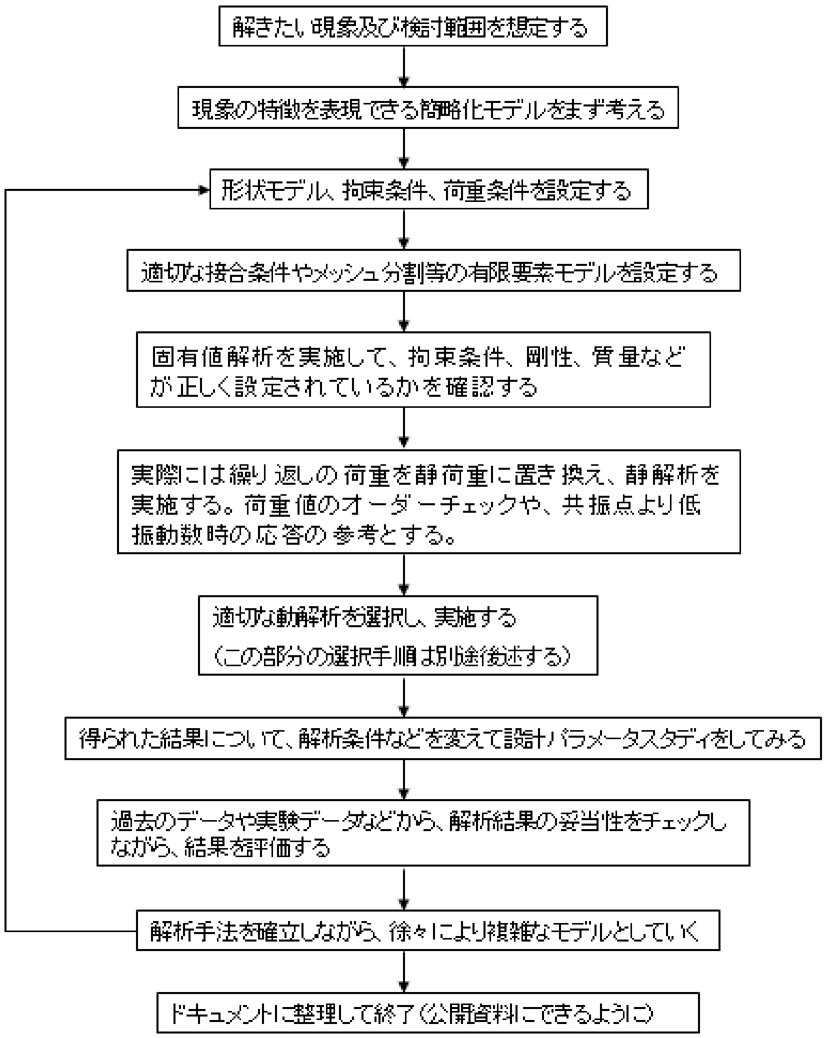


図 4-2-1 振動解析の基本検討ステップ

まずは、解析作業を始める前に、どのようなモデルで、どのような条件のもとで、どのような結果が欲しいのかを明確にイメージすることである。これには、ある程度の経験が必要となり一朝一夕にはできない事ではあるが、これまでの章の簡単なモデル化での現象の理解と実験等からの経験により可能となると思われる。また、CAE を用いて検討するには、振動現象のみならず数値解析の基本的な内容も必要になるであろう。この節では、FEM の基礎理論及び FEM による振動解析機能についての概要をあまり式を使わずに述べることにする。そして、次節では効果的な解析を実行するための注意点やノウハウをまとめてみることにする。

4-2-2　有限要素法による連続体モデルの数値解析

実際の構造体（弾性体）は連続であり、その意味では無限の自由度を持っているといえる。そのようなモデルに対して有効なのが、有限要素法（以下 FEM と呼ぶ）である。通常、連続体モデル(continuous model)は高次の連続関数（偏微分方程式）で表され、それを解けば厳密解が得られる。しかし、簡単な梁モデル等を除いては解くことが出来ないし、構造形状や荷重点数などケースバイケースでフィットする異なる次数の連続関数を仮定して適用しなければならない。そこで、汎用的な近似解法として開発されたのが FEM である。FEM では、形状の複雑さや荷重の複雑さに応じて、構造体を小さな小領域（有限要素）に分割する。そして、一つの要素内では、比較的低次の（1 次とか 2 次の）連続関数を仮定するものである。このことにより、任意の形状や境界条件に対して、要素分割数を変更するだけで同じ手法（低次の関数）を使うことが可能となる。このことから分かるように、FEM でも自由度無限大の連続体を扱っているわけではなく、あくまで有限自由度の近似モデルを扱っているということ、そして、その近似度（精度）は要素分割に依存しているという事実である。図 4-2-2 に概念図と、良く使われる用語を示す。

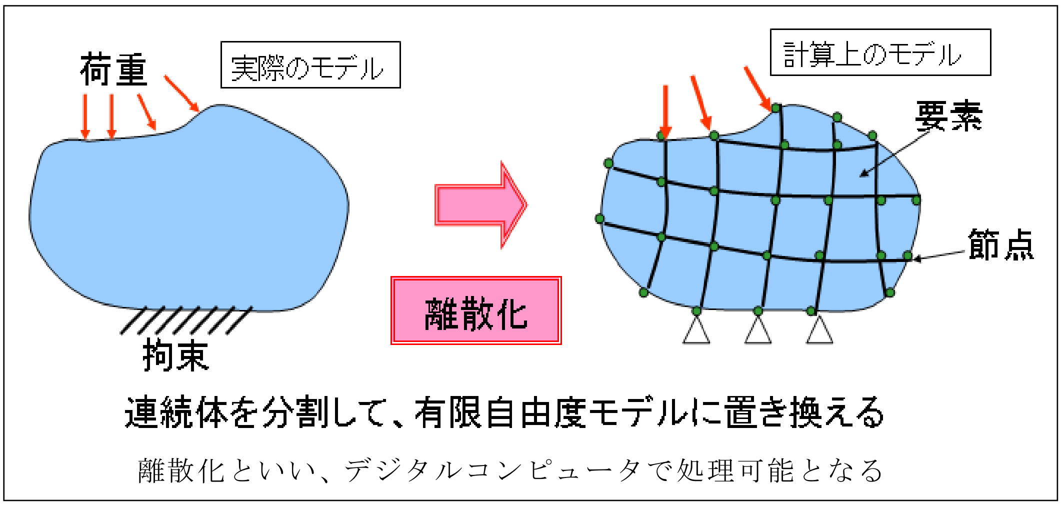


図 4-2-2 FEM の概念図および用語

図 4-2-3 には、有限要素法の基本的な考え方を示す。もし、対象物の変位分布が予め分かっていたら、その関数形を指定し未定係数を境界条件に合わせてフィッティングさせていけばよいが、任意の形状・荷重・拘束条件に対しては無力である。そこで、領域を細かく分割し、それぞれの条件による複雑性は領域分割の細かさで対応するという考え方を採用する。その代わり、１領域内（１要素内）での変位分布は単純な関数に固定することができる。細かく分割した領域を有限要素(finite element)、要素を結合している端点を節点(node)と呼ぶ（図 4-2-2 参照)。

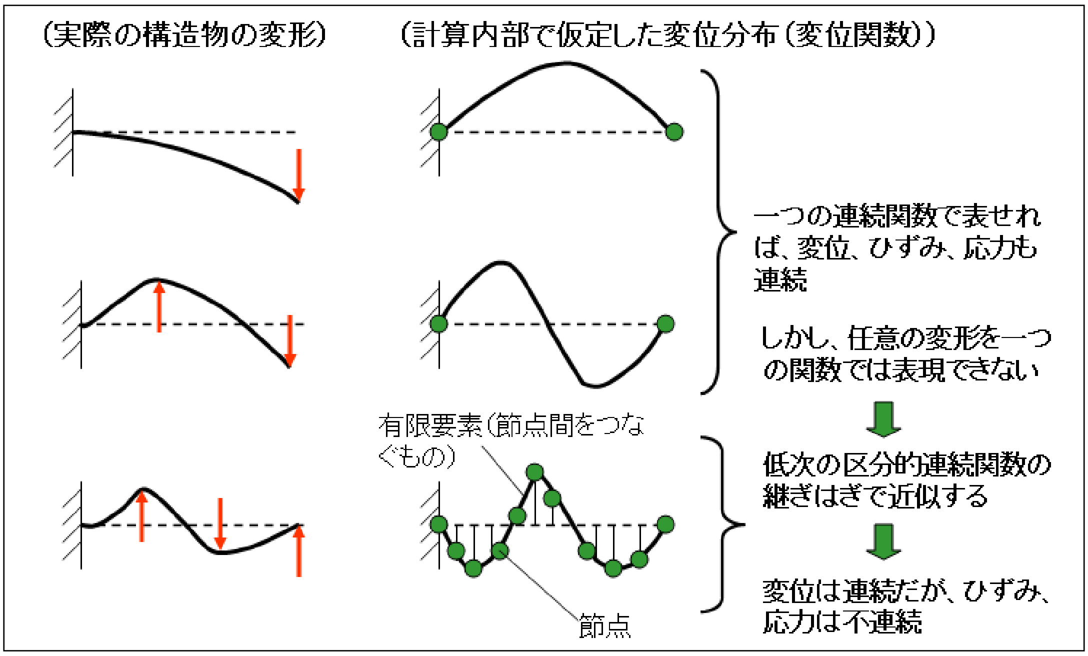


図 4-2-3　有限要素法の基本的な考え方

次に、分割した各要素の情報（剛性）をどのように、任意形状として扱うかを検討する。図 4-2-4 に１本のばねモデルを示す。上端固定で下端に荷重が作用する場合は、図中上部に示すフックの式でよいが、それ以外の条件には対応できない。そこで、下部に示すマトリックス形に一般化式で表すことにすれば、様々な条件に対応可能な要素となる。

一般化表示ができれば、すべての要素に対して同じ処理で対応が可能となる。図 4-2-5 のようにばねが３本あれば、節点の力および変位を変数として同じ形の要素剛性式が３つ立てられる。

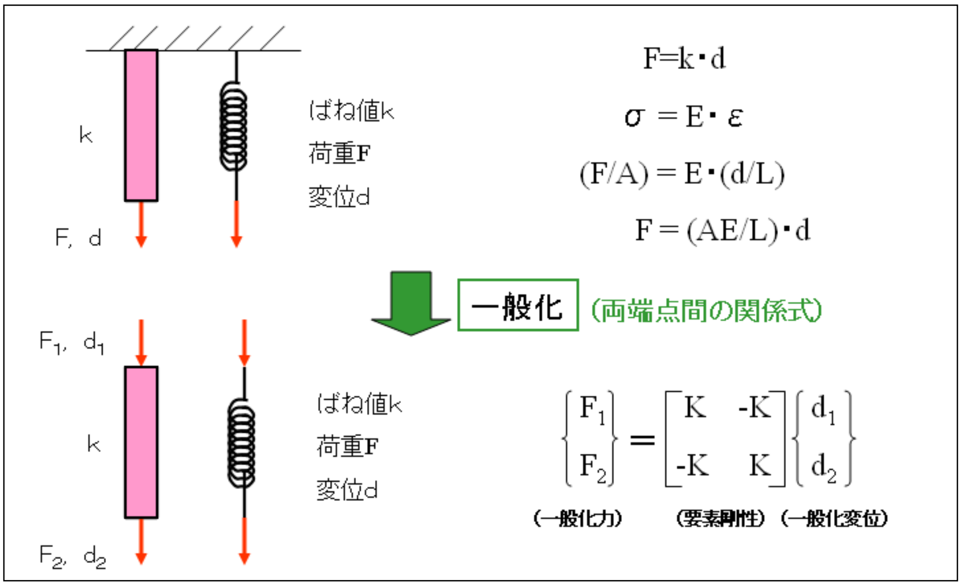


図 4-2-4　要素剛性の一般化表示

それぞれのばねの要素剛性式ができたら、それをばねのつなぎ具合に応じて全体の力と変位の関係式(マトリックスの形になっている)に埋め込んでいけばよい(図 4-2-6 参照)。たとえは、ばね A は、節点①と②をつないでいるばねなので、その節点①と②の関係を示す位置のところにばね A の要素剛性式を埋め込めばよい。同様にばね B,C も関係する節点位置に埋め込んでいく。そのことにより、構造全体に対する荷重と変位の関係式を立てることが出来る。そして、そこに既知の境界条件を代入して、未知量を連立方程式を解くことにより求めることができる。

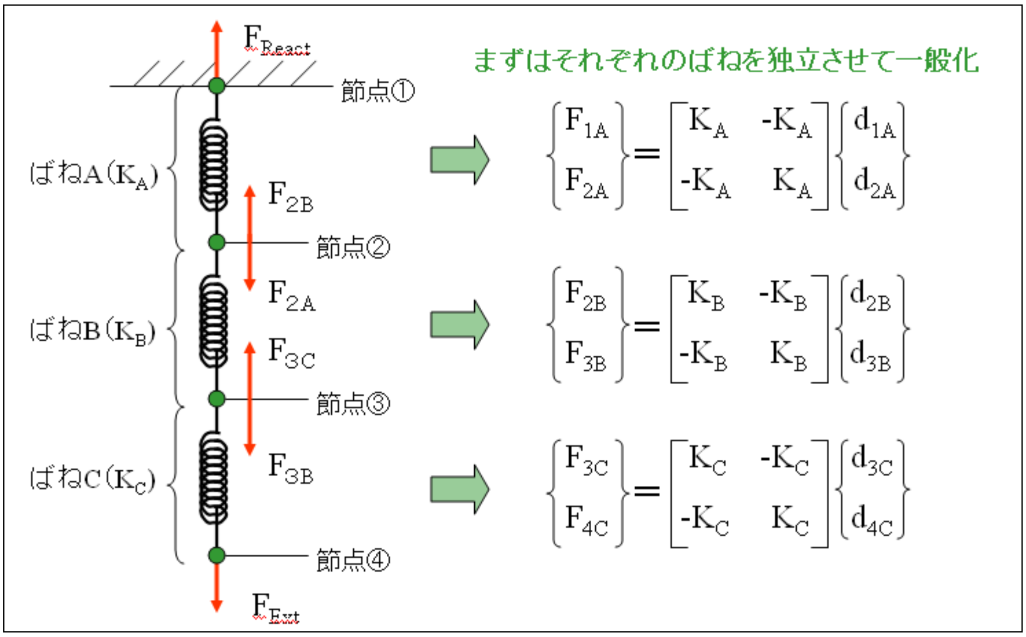


図 4-2-5　多体ばねモデルへの対応

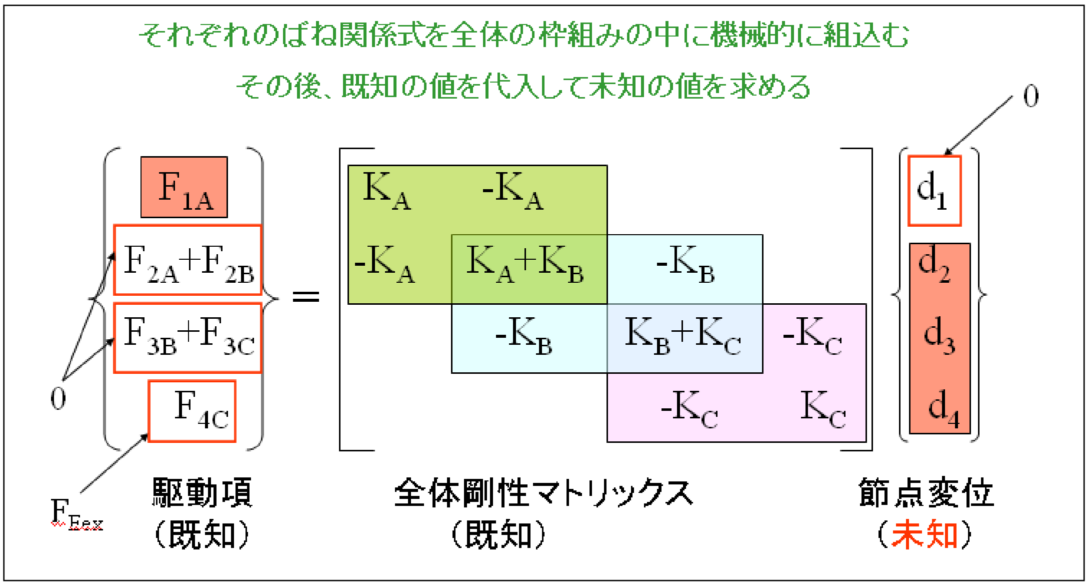
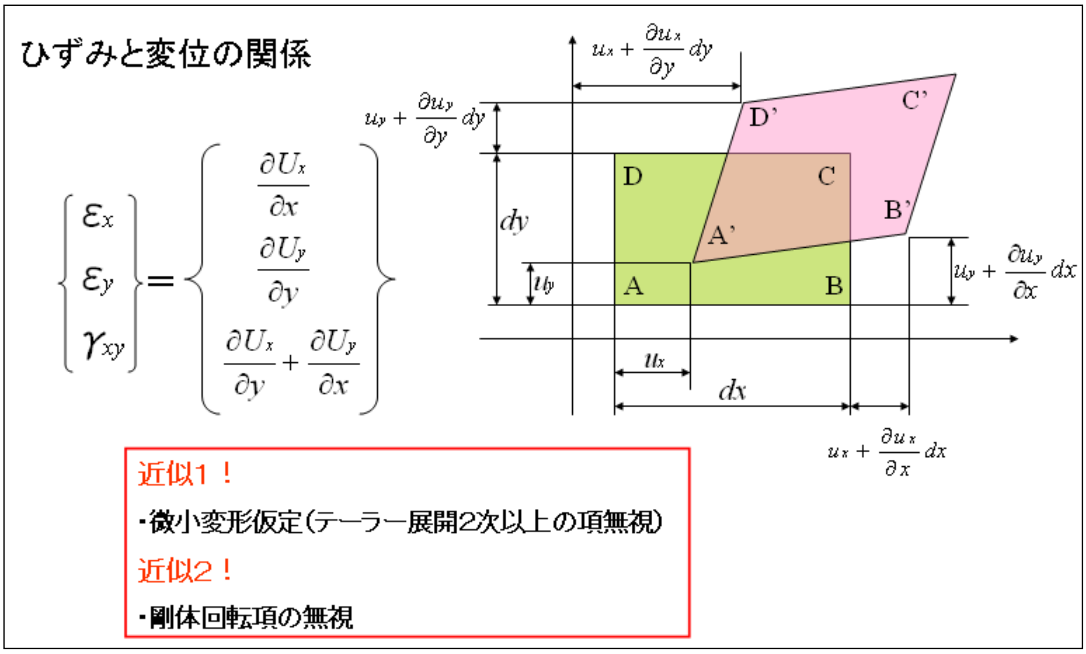


図 4-2-6　全体剛性マトリックスの作成

上記までは、一軸のばね要素であるが、前節の平板モデルのように２次元的に連続な要素を考えてみる。まず、基本的な変位量とひずみの関係を考える。これは、材料力学より導出されるように 2 次元モデルの場合、図 4-2-7 のように関係付けられる。変位 u の変化率がひずみ ε であるが、２方向の変化が生じ偏微分の形で表現される。



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial U_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + \dfrac{\partial U_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$u_x + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} dy$, $u_y + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} dy$, u_y, u_x, $u_y + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} dx$, $u_x + \dfrac{\partial u_x}{\partial x} dx$

図 4-2-7　２次元要素のひずみと変位の関係

次に、要素内のひずみと応力の関係を示す。図 4-2-8 のように、２次元問題になるとヤング率 E だけでなくポアソン比 ν が影響してくるのがわかる。ポアソン比は、縦ひずみと横ひずみが影響しあう係数であり、2 次元連続体の特徴である。

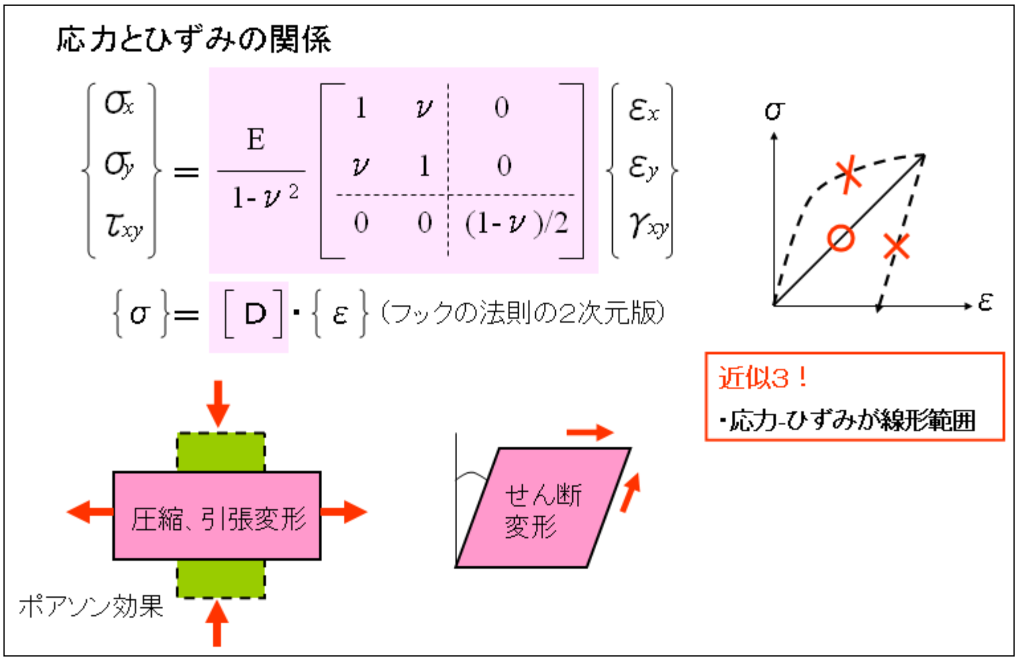


図 4-2-8　２次元要素の応力とひずみの関係

(4-2-1)式に示す力の釣り合い式に、図 4-2-7 のひずみと変位の関係式、図 4-2-8 の応力とひずみの関係式を代入して、未知変位量の式にして解けばよいことになるが、高次の微分方程式となり実際問題を直接解くことはできない。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f=0 & \text{（微小部分に作用しているX方向の力）}\\[2ex] \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+g=0 & \text{（微小部分に作用しているY方向の力）}\end{cases} \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

（内力）＋（外力）=0

そこで、まわりくどいようであるが、要素内のひずみエネルギーを求め、そのエネルギーが最小のとき、(4-2-1)式の力の釣り合い式と等価な式となるという最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いることにする。これは、外力も含めて系のひずみエネルギーが最小のときが一番安定しており静的に釣り合い状態にあることを示している。そのためには、要素内のひずみと応力を求め、それを要素内で積分して総ひずみエネルギーを求めてその極値=0 の関係式を満たせばよいことになる。図 4-2-9 にその流れを示す。

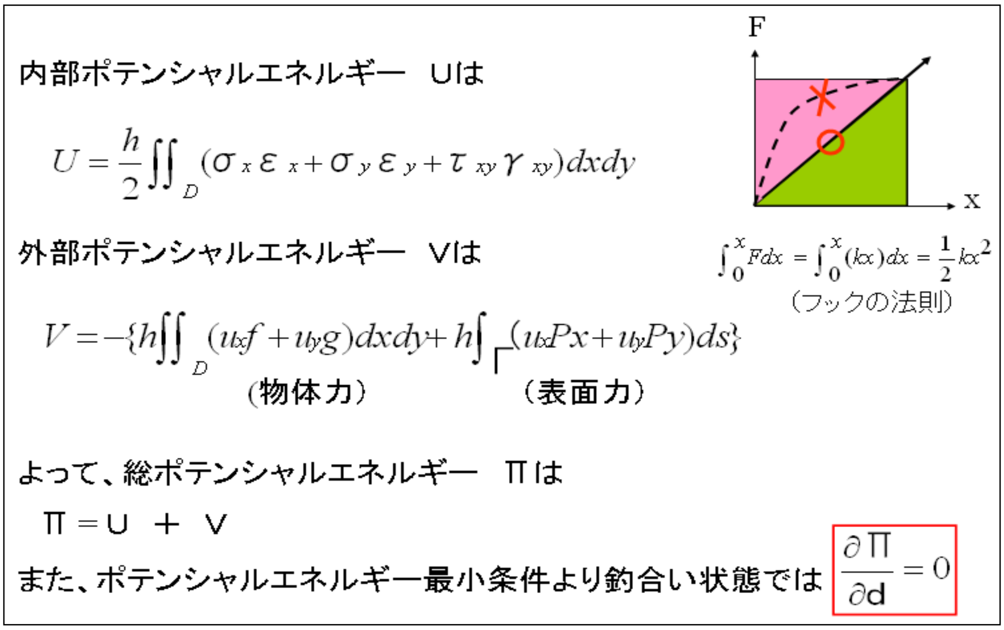


図 4-2-9　弾性体のひずみエネルギーと最小ポテンシャルエネルギーの原理

次の手順として、要素内のひずみと応力はどの様に求めるのかという課題が残る。ここで、有限要素法の図 4-2-10 に示した考え方が登場する。1 要素内は微小な面積であり、変位分布は単純な形状で近似できると仮定するのである。つまり、要素内の任意点の変位 u と節点変位 d1, d2, d3, d4 の関係を 1 次または 2 次式程度の関数で決めてしまうのである。図 4-2-10 の関数 N は形状関数(shape function)または変位関数(displacement function)と呼ばれているもので、有限要素法の特徴を示すものである。

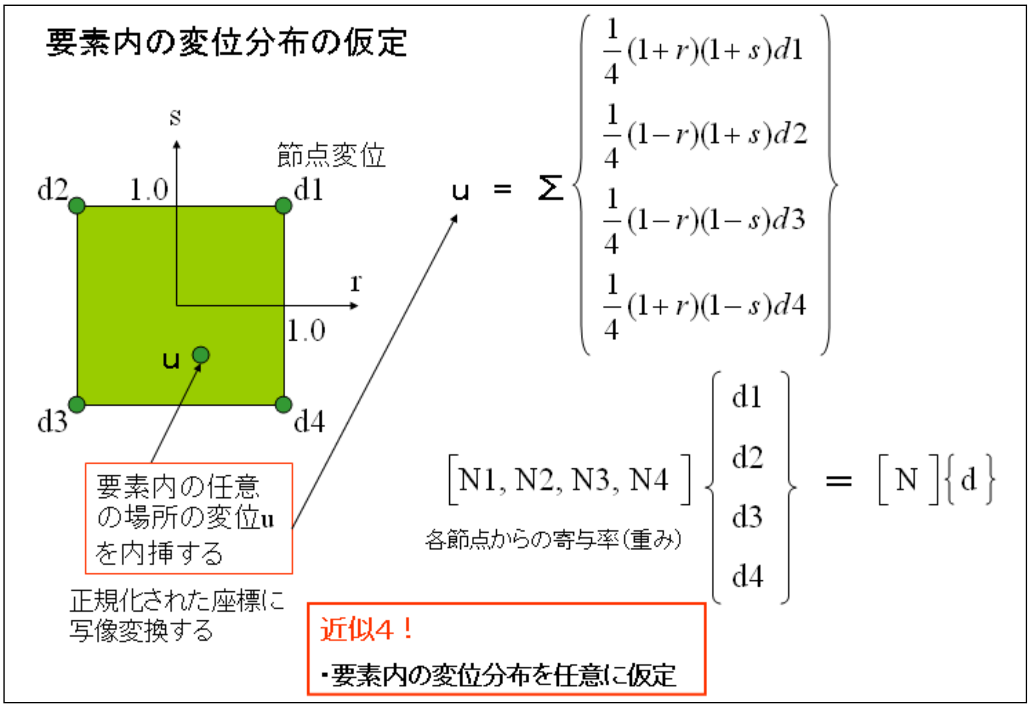


図 4-2-10　有限要素内の形状関数

すると、変位とひずみの関係式は図 4-2-7 のように示されているので、結局節点変位と要素内の任意の点のひずみは図 4-2-11 のように[B]マトリックスで関係付けられることになる。

従って、要素内の任意の場所のひずみは、ひずみ-変位関係式に代入すれば

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{N} & 0 \\ 0 & \mathrm{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}$$

$$= \left[\ \mathrm{B}\ \right] \cdot \left\{ \mathrm{d} \right\}$$

[B]マトリックスは、節点変位を要素内のひずみに変換するマトリックスで有限要素法で重要なマトリックスとなる。(大変形問題では節点変位から剛体変位分を除いてひずみを求める必要がある)

要素内のひずみが求まれば、応力-ひずみ関係式によりすぐに要素内の応力も求まる。

図 4-2-11 要素内ひずみと節点変位の関係

更に、ひずみと応力の関係は図 4-2-8 のようであるので、結局、要素内の任意の点のひずみと応力が節点変位で表されることになる。要素内のひずみエネルギーを表す式に代入すると図 4-2-12 のように展開できる。すると、ひずみエネルギーが節点変位と全体剛性マトリックスの積で表され、その極値を取ることにより、力の釣り合い式を解いたことと同等のフックの関係式が導かれる。その全体手順を図 4-2-12 に示す。全体剛性マトリックスが導出できれば、荷重 f を入力して連立方程式を解くとこにより、未知の節点変位 d を求めることができる。この手順は、3 次元連続体にも同様に拡張できる。

従って、要素内のひずみ、応力より内部エネルギーが計算できる。
Π=U＋Vをマトリックス表示すると

$$\Pi = \frac{h}{2}\iint_D \underbrace{\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dxdy}_{\text{(内部エネルギー)}} - \underbrace{\{d\}^T\{f\}}_{\text{(外部エネルギー)}}$$

$$= \frac{1}{2}\{d\}^T\underbrace{\{h\sum_e \iint_D [B]^T[D][B]Jdrds\}}_{\text{(要素剛性マトリックスの足し合わせ)}}\{d\} - \{d\}^T\sum_e \{f\}$$

$$= \frac{1}{2}\{d\}^T\underbrace{[K]}_{\text{(全体剛性マトリックス)}}\{d\} - \{d\}^T\{f\}$$

$\dfrac{\partial \Pi}{\partial d} = 0$ より $\boxed{[K]\{d\} - \{f\} = 0}$ 節点変位と節点外力の釣合い式が求まる。結果的にばねモデルと同じ形となる。

図 4-2-12　剛性マトリックスの導出手順

次に、有限要素の種類について説明する。有限要素は大きく分けてビーム要素、シェル要素、ソリッド要素の３つに分けられる。ビーム要素は構造部材が細長い棒のような形状のものに用いられる。また、板金部品のように薄い板を折り曲げて作ったような構造物の場合には、シェル要素を用いる。ソリッド要素は比較的肉厚の厚い鋳物部品のような形状に用いられる。図 4-2-13 にその概念図を示す。

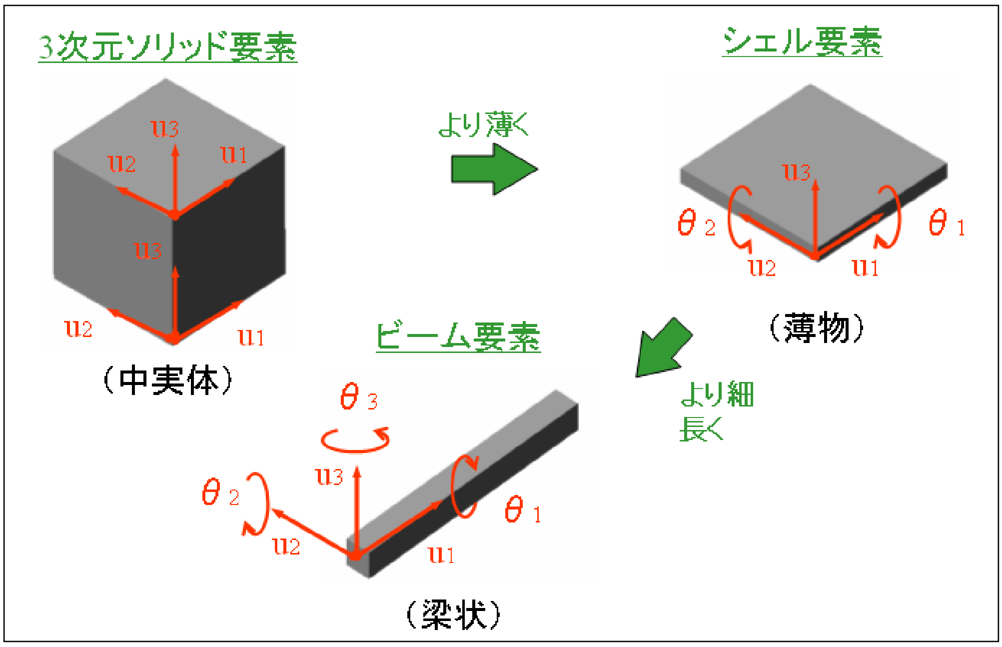
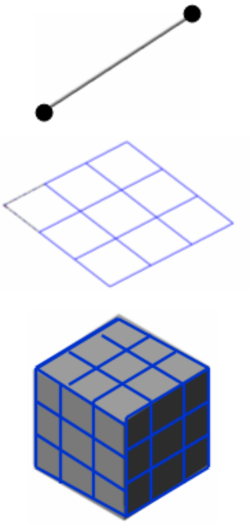


図 4-2-13　各有限要素の概念図

図 4-2-14 には、各要素の簡単な特徴を示しておく。



ビーム要素	1本の線(面積なし) 属性として、断面積(A)、断面2次モーメント(I)、断面ねじりモーメント(J)	フレーム構造物に向いている 計算時間が早い 属性データの準備が必要 仕口などの応力評価ができない
シェル要素	サーフェス(体積なし) 属性として、板厚(t)	薄肉形状に最適 精度が良く、計算時間も早い 板厚変化があると、中立面をとるのが難しい フィレット部などの応力度が評価出来ない
3次元ソリッド	ソリッド(体積あり) 属性データは不要	厚肉形状に向いている モデル化のノウハウが少ない 薄肉に対して精度が悪い メモリーと計算時間がかかる

※すべての要素において、
材料特性(E、ν)は必須

図 4-2-14 各有限要素の特徴

要素の計算精度について少し考えてみる。図 4-2-15 にソリッド要素とシェル要素の表現の違いを示す。ソリッド要素は、面内の伸び収縮およびせん断（ずれ変形）を表現し易く、シェル要素は面内の伸び収縮および曲げ（回転変形）を表現し易い。このそれぞれの特徴を生かして要素を選択する必要がある。つまり、薄板形状で曲げ変形が支配的なものはシェル要素、ブロック状の形状で、せん断変形が支配的なものはソリッド要素を使うべきである。従って、平板の固有値解析でも、シェル要素ではメッシュが粗くても理論解とよく一致していたことが分かる。

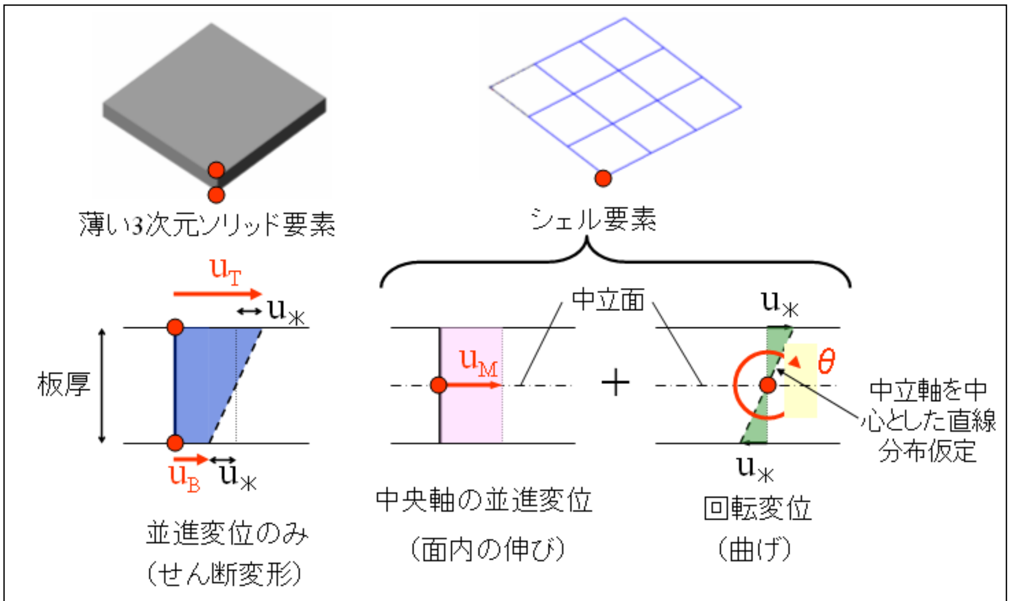


図 4-2-15 ソリッド要素とシェル要素の表現の違い

次にメッシュ分割の考え方を示す。有限要素法では、節点変位は連続するが、隣り合う要素間でひずみ量や応力は必ずしも連続する条件は入れられていない。したがって、精度の良い解析を行うには要素間の応力ギャップ量（ジャンプ量）をなるべく小さくさせる工夫が必要となる。そのためには、図 4-2-16 のように、特に応力変化の激しい部位を集中的に細かくする必要がある。単に応力値が高くても変化率が少なければ、比較的粗いメッシュでも良いことになる。現実的にはすべての領域でメッシュを細かくすることはできないので、応力集中部または注目部位のみを細かくして解析することが行われる。

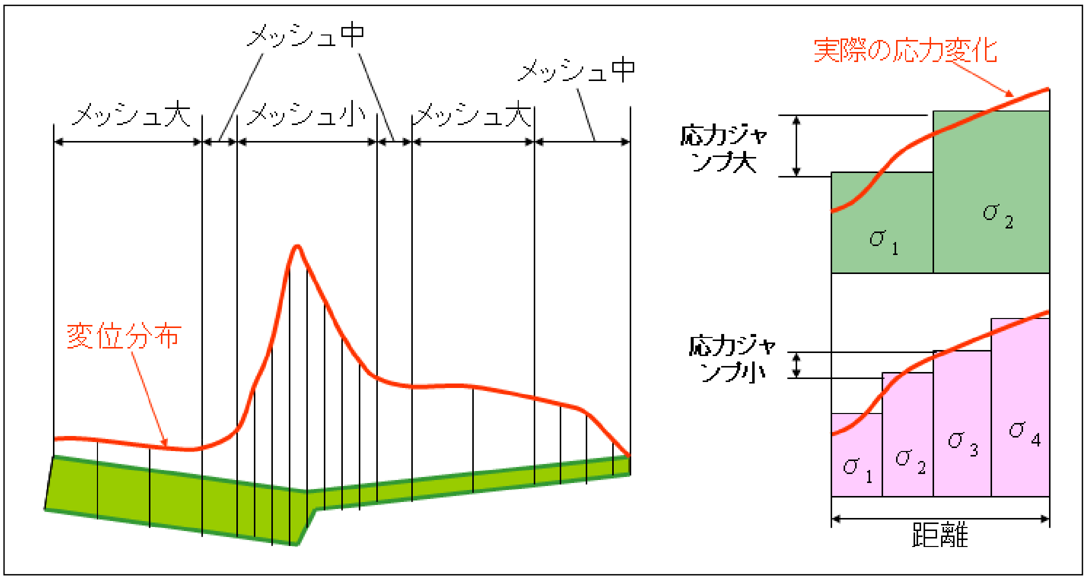


図 4-2-16　メッシュ分割の考え方

また、要素には図 4-2-17 のように要素の角点のみに節点をもつ１次要素(first order element)と呼ばれている要素と各辺の中間にも節点をもつ２次要素(second order element)と呼ばれているものがある。１次要素よりも２次要素のほうが、１要素内でより高次の変形モードまで表現できるようになり、応力ギャップ量を小さく抑えることができる。その分格段に精度が向上するが、当然、同じ要素数でも２次要素の方が計算時間は増大することになる。近年はコンピュータ性能が飛躍的に向上しており部品レベルであれば計算時間もそれほど苦にならないため、ソリッド要素、シェル要素とも精度を重視して２次要素をデフォルトで用いることが一般的である。

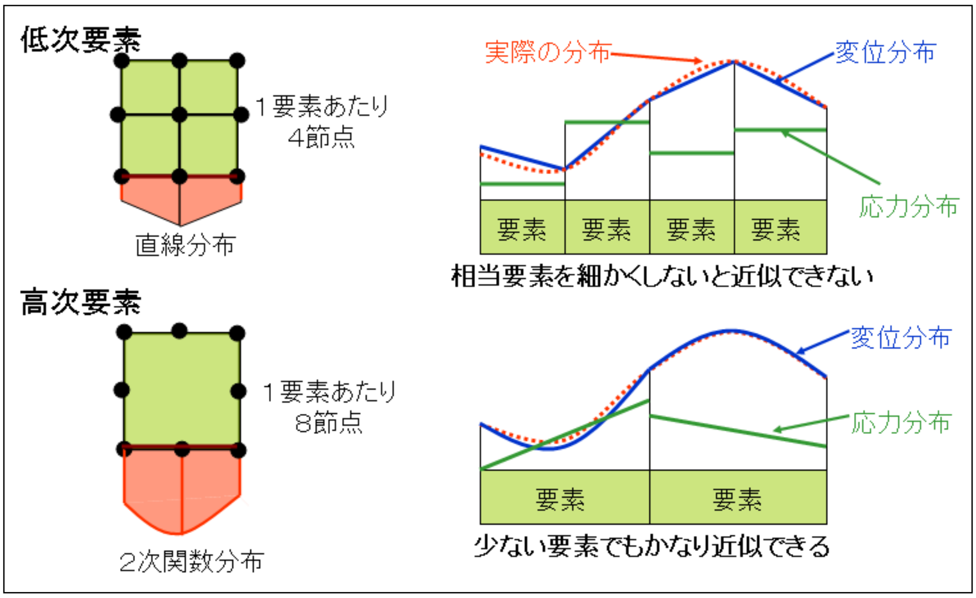


図 4-2-17　1 次要素と 2 次要素

4-2-3　振動解析の各種数値解析手法

１）　固有値解析

振動解析の基本は、減衰を無視した構造物の自由振動特性を把握することである。これは、先に述べたように振動の基本特性であるからである。固有値解析を行うことにより、モーダルパラメータである固有振動数とそのときの振動モードを求めることが出来る。

固有値解析では、具体的な加振力下での具体的応答量を求めることはできないが、その設計的意味は大きい。多くの騒音、過剰振動、故障、破壊の原因は、外力との共振現象であるからである。構造物の固有振動数を把握し、効果的に共振を避けることにより、諸問題を解決できることも多い。また、もし共振していないのに上記の問題が生じる場合は、外力の影響がそもそも大き過ぎることになり外力の低減など、リブなどの補強対策以外の別の対策を考える必要もある。更に、実験モーダルを実施する際の、加速度ピックアップの最良配置を決める指針にも使われる。

固有値は、構造物の剛性と質量により決定されるが、実際の構造物ではどこか拘束させているわけで、拘束条件にも当然依存する。たとえば、両端支持の梁モデルで、両端をピン支持にするか、回転固定にするかで大きく固有値とモードが異なってくる。

全く同じ固有値が複数求まる場合がある。これは、振動方向に応じて同じ振動モードが生じる場合であり対称モデルに多い。更に、ゼロ固有値が求まる場合もある。0Hz の固有振動数とは剛体モードを示しており構造体自身は変形していない。剛体運動を予期していない場合は、モデルの拘束条件や結合条件を見直す必要がある。

以下、固有値解析の概要を示す。

$$[\mathrm{M}]\left\{\ddot{x}\right\}+[\mathrm{K}]\{x\}=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

ここで、[M]は質量マトリックス、[K]は剛性マトリックス、{X}は変位ベクトルである。(4-2-2)式の解の形を現すために、変位ベクトル{X}を(4-2-3)式の形とする。すなわちこれは、振動現象を時間変化部と空間的変化部とに分離していることになる。

$$\{x\}=\{\Phi\}\sin\omega t \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

ここで、{Φ}：固有モードベクトル、ω：固有振動数である。

(4-2-3)式を(4-2-2)式に代入すれば、(4-2-4)式となる。

$$-\omega^2[\mathrm{M}]\{\Phi\}\sin\omega t+[\mathrm{K}]\{\Phi\}\sin\omega t=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

整理すると

$$\left([\mathrm{K}]-\omega^2[\mathrm{M}]\right)\{\Phi\}=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

となり、(4-2-5)式は時間項が両辺キャンセルされて、固有値と固有モードの世界に変換できたことになる。そして、これが、{Φ}=0 以外でも常に成り立つには、数学的にマトリックスの行列式（デターミナント）が 0 の場合である。つまり、

$$\det\left([\mathrm{K}]-\omega^2[\mathrm{M}]\right)=0 \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

を満たすことになる。連続体の場合、(4-2-6)式はマトリックの形をしており、大規模なマトリックスの処理を効率的に行なう必要がある。そのマトリックの固有値ωと固有ベクトル{Φ}を求める問題の数値的解法としてはいくつか用意されている。以下に主な手法とその特徴を示す。

・インバースパワー法

指定された範囲内で、最低次の固有値と固有モードから順番に検出していく方法である。古典的な方法であるが、大規模モデルには時間がかかり、モードの見落としもある。そこで、通常は Sturm シーケンスチェック付アルゴリズムが用いられる。

・ハウスホルダー法

小規模で密なマトリックの問題に向いている。対称マトリックスを三重対角化してから、固有値を求める。見落としもなく確実な方法であるが、自由度の小さいモデル向きである。各種手法の前処理として使われることも多い。

・サブスペース法

全体のモデル自由度に対して、解きたい次数分だけの自由度を持ったより小さいサブスペースに縮退した後、固有値を求める。従って、ある程度の大規模問題までカバーでき、デフォルトの手法として指定されていることが多い。しかし、欲しい固有値の数より多くの固有値を計算しておかないと精度が落ちることが知られている。

・ランチョス法

現在、改良されたランチョス法はもっとも効率が良く、解の見落としもない。従って、超大規模なモデルでは、ランチョス法が唯一の方法になる。しかし、厳しい問題など固有値が近接したり重根が存在する場合は、処理の仕方によっては大きな誤差を含む。サブスペース法でも計算可能な場合は、双方で計算をしてみることを勧める。

２）モード解析法

今まで、複雑な多自由度モデルもマトリックの固有値問題を解くとこにより、構造物のモーダルパラメータを抽出することが出来た。ここでは、更に多自由度系モデルの強制振動解析手法を紹介する。この解法は、あらかじめその構造体の固有振動数と固有振動モードを求めておき、実現象の振動を周波数ごとのモードの足し合わせとして変換する。固有モードの足し合わせと見ることにより、後で説明する振動モード間の正規化条件と直交条件が使えて、多自由度の連成振動を１自由度の単振動応答の足し合わせに変換できることになる。１自由度系の強制振動であれば、先に見たように簡単に応答が求まるので、大規模モデルの振動応答解析が効率よく行えることになる。以下、簡単に理論モード解析の手順を見てみる。

その前に、前節で求めた固有ベクトルには以下の重要な２つの特性を持っていることを紹介する。その理論的証明は別途参考書を参照願いたい[1]。

① 振動しているある瞬間の変形状態は、その構造物の全ての固有モードベクトルの足し合わせで表現できる。

$$\{x\}=\sum_{i}\{\Phi_i\}q(t) \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

q(t)は、モーダル座標変位と呼ばれ、固有モードの世界の独立座標である。

②[K]、[M]マトリックが、対称で実数であれば（通常の構造物に対して成り立つが）、以下のモード間の関係が成立する。

$$\left.\begin{array}{ll} i \neq j \text{なら} & \{\Phi_i\}^{\mathrm{T}}[M]\{\Phi_j\} = 0 \\ i = j \text{なら} & \{\Phi_j\}^{\mathrm{T}}[M]\{\Phi_j\} = m_j \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

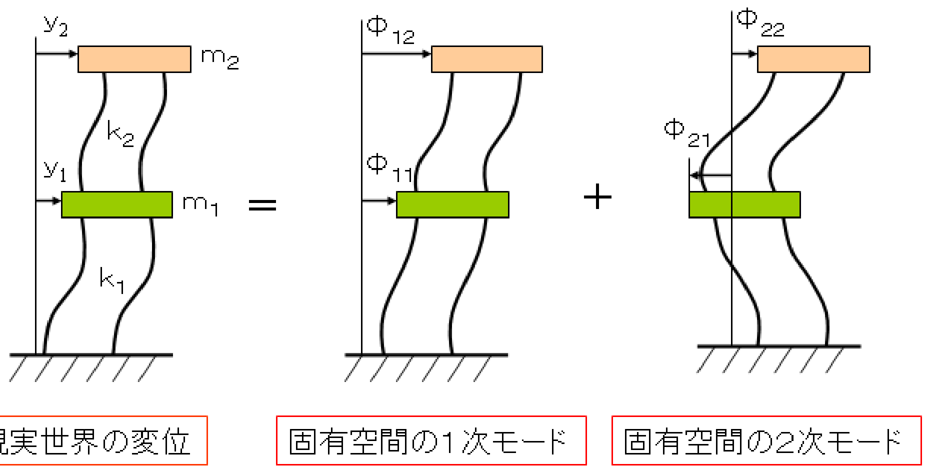
$$\left.\begin{array}{ll} i \neq j \text{なら} & \{\Phi_i\}^{\mathrm{T}}[K]\{\Phi_j\} = 0 \\ i = j \text{なら} & \{\Phi_j\}^{\mathrm{T}}[K]\{\Phi_j\} = \omega^2 m_j \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

これは、異なるモード間では影響し合わない（連成しない）で、自分自身のモード内で完結していることを示している。数学的には異なるモード間で直交関係が成り立つとも言う。m_j はモード質量(modal mass)、$\omega^2 m_j$ はモード剛性(modal stiffness)とよばれ、モード空間で見たときの等価質量、等価剛性に相当する。モード質量およびモード剛性は各モード内で独立（他のモードと無関係）しているので、１自由度モデルと同様に

$$\omega_j = \sqrt{\frac{\{\Phi_j\}^{\mathrm{T}}[K]\{\Phi_j\}}{\{\Phi_j\}^{\mathrm{T}}[M]\{\Phi_j\}}} \qquad (4\text{-}2\text{-}10)$$

(4-2-10)式のレーリー(Reyleigh)の式も成り立つことが分かる。

上記の固有ベクトルの特徴を上手く利用した手法がモード解析である。いま、図4-2-18 のように現実の世界での２自由度（たとえば、２階建て構造物）を考える。そして、その２階建て構造物は、固有値解析を行うことにより、１次固有モードと２次固有モードが得られる。



任意の変形および外力が正規化モードの組合せで表現できるという前提に立つ。これは、フーリエ級数を用いて任意の関数をsin、cos の組合せで表現できることと同様である。

図 4-2-18　２自由度モデルの実世界とモード世界の関係

今、実世界の変位量 y_1, y_2 を求めようとすると(4-2-11)式の連立運動方程式を解くことになる。この式は、１階部分の運動方程式に y_2 の項が入り、２階部分の運動方程式に y_1 の項が入り、お互いに連立していることがわかる。これは、当然で、実世界では１階、２階部分がそれぞれ影響し合って振動していることを示している。２階建て程度ならこれでも解けるかもしれないが、50 階、100 階建て構造物の振動解析をしようとすると、全ての自由を含む連立方程式を解かなければならないことになる。

$$\left.\begin{aligned} M_1\ddot{y}_1+k_{11}y_1+k_{12}y_2=P_1(t) \quad &(m_1\text{についての釣り合い式}) \\ M_2\ddot{y}_2+k_{21}y_1+k_{22}y_2=P_2(t) \quad &(m_2\text{についての釣り合い式}) \end{aligned}\right\} \tag{4-2-11}$$

そこで、変位および加速度も実世界の変位 y は、固有モードの足し合わせで表現できる特徴を利用する。

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)&=\Phi_{11}q_1(t)+\Phi_{21}q_2(t) \\ y_2(t)&=\Phi_2q_1(t)+\Phi_{22}q_2(t) \end{aligned}\right\}\text{変位} \tag{4-2-12}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_1(t)&=\Phi_{11}\ddot{q}_1(t)+\Phi_{21}\ddot{q}_2(t) \\ \ddot{y}_2(t)&=\Phi_{12}\ddot{q}_1(t)+\Phi_{22}\ddot{q}_2(t) \end{aligned}\right\}\text{加速度も} \tag{4-2-13}$$

(4-2-12)式及び(4-2-13)式を(4-2-11)式に代入すると、(4-2-14)式のようになるが、

$$\left.\begin{aligned} m_1\Phi_{11}\ddot{q}_1+m_1\Phi_{21}\ddot{q}_2+\lambda_1m_1\Phi_{11}q_1+\lambda_2m_1\Phi_{21}q_2&=P_1(t) \\ m_2\Phi_{12}\ddot{q}_1+m_2\Phi_{22}\ddot{q}_2+\lambda_1m_2\Phi_{12}q_1+\lambda_2m_2\Phi_{22}q_2&=P_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{4-2-14}$$

(4-2-14)式の第１式の両辺に Φ_{11} を掛け、第２式の両辺に Φ_{12} を掛けて、両辺足し合わせて q_1 についてまとめると左辺は、

$$\underline{(m_1\Phi^2_{11}+m_2\Phi^2_{12})}\ddot{q}_1+\underline{(m_1\Phi_{11}\Phi_{21}+m_2\Phi_{12}\Phi_{22})}\ddot{q}_2+$$
$$\lambda_1\underline{(m_1\Phi^2_{11}+m_2\Phi^2_{12})}q_1+\lambda_2\underline{(m_1\Phi_{11}\Phi_{21}+m_2\Phi_{12}\Phi_{22})}q_2$$

となって、そこに固有ベクトルの直交関係を用いることにより、赤いアンダーライン部は１に、青いアンダーライン部は０になり、結局、左辺は、

$$\ddot{q}_1+\lambda_1q_1$$

になってしまう。同様に q_2 についてのみ取り出せば、(4-2-14)式は結局、固有モード

の特徴①、②を活用することにより、

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{q}_2 + \lambda_1 q_1 = \Phi_{11} \mathrm{P}_1(t) + \Phi_{12} \mathrm{P}_2(t) \\ \ddot{q}_2 + \lambda_2 q_2 = \Phi_{21} \mathrm{P}_1(t) + \Phi_{22} \mathrm{P}_2(t)\end{array}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

とすることができる。これは、何を意味しているか図 4-2-19 に示してみる。外力 P_1, P_2 は入力データであるので、(4-2-15)式は、q_1, q_2 それぞれの非連成の 1 自由度振動方程式である。これを解くことにより、q_1, q_2 が簡単に求まり、(4-2-12)式に再度代入することにより、実世界の変位 y_1, y_2 が求まることになる。100 階建ての構造物でも、1 自由度の運動方程式を 100 回解くだけで同じ手法が使えることが分かる。固有値解析の結果を使って、多自由度系の動的応答解析を効率良く行う手法が、モード解析(modal analysis)である[1],[3]。

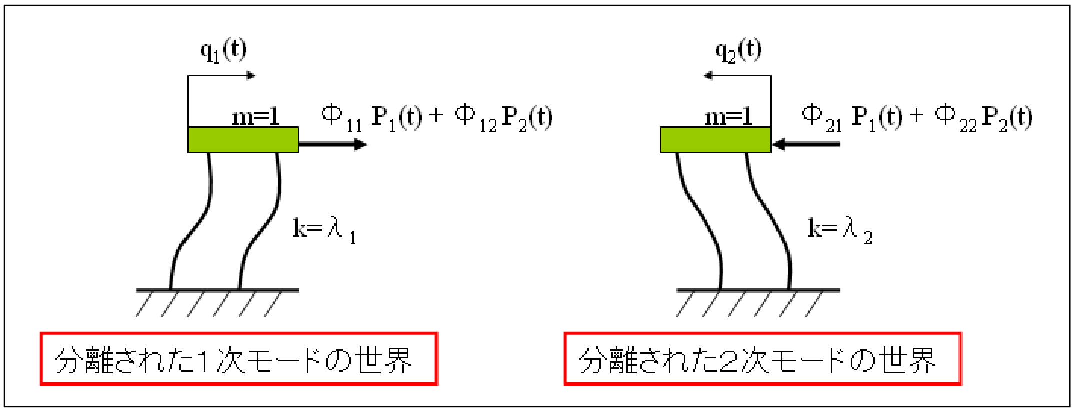


図 4-2-19　モード世界で分離された 1 自由度モデル

前章で見たように、実物体のインパルス応答を観測して、モーダルパラメータを同定する方法を特に実験モード解析法(experimental modal analysis)といい、それに対比してマトリックの固有値解析及びモード解析法を用いて、モーダルパラメータ及び強制振動の応答を求めるやり方を理論モード解析法(theoretical modal analysis)と区別して呼ぶこともある。

2)-1 モーダル周波数応答解析

周波数応答解析は、定常加振状態での定常応答を求めるものである。固有値解析では、共振するかしないかは求めることはできるが、具体的応答量を求めることはできない。ここでは、強制荷重も応答も調和振動であるとの前提に立っている。すなわち、タイヤやエンジン、工作機械などの不釣合いを持った回転体から定常的に繰り返し荷重を受ける場合である。このような定常状態を把握するには、周波数領域で現象を見るのが分かり易い。実際は、時間軸で現象は進んでいるが、定常状態までを見るには、

何時間も時間軸を追いかけなければならないからである。荷重の入力も周波数軸で入力する。すなわち、どの周波数成分の調和振動がどのくらいの強さで含まれているかを入力する。そして、計算結果も周波数軸での各点の変位、速度、加速度、ひずみ、応力などが求まる。減衰効果は、モード減衰比、構造減衰（レーリー減衰）で指定する。

2)-2 モーダル過渡応答解析

過渡応答解析は、時刻歴の強制荷重を受ける際の動的応答を求めるための一般的な方法である。これは、入力荷重履歴も計算結果応答図も時刻歴で表され、直感的でわかりやすい。時刻歴の実波形が測定されているような場合は、そのまま荷重データとしてモデルに入力し解析を行うことも出来る。また、一過性の衝撃的な荷重入力も可能である。しかし、一般に計算時間が膨大になり結果評価も膨大になる場合が多い。減衰効果は、モード減衰比の他、構造減衰（レーリー減衰)、粘性減衰を指定することができる。

３）その他の振動解析手法

・複素固有値解析

減衰効果を入れた固有値と固有モードを求めるものである。減衰が入ると、厳密には固有値が下がり位相遅れが生じ、数学的には複素数で扱うことになる。しかし、計算時間もかなりかかるので、高減衰モデルで無い限り、通常の実固有値解析で行なうのが普通である。

・ランダム周波数応答解析

入力荷重及び計算された応答結果もすべて統計的な観点で考えることにより、ランダムの荷重を指定できる。つまり、その瞬間の値は未知であるが、平均値・標準偏差・確率分布などでその特性を記述するものである。荷重は横軸周波数、縦軸にエネルギー密度を示すPSD(Power Spectrum Density)で入力する。これは、周波数応答析解析をした後に PSD により統計的なばらつき（0～+1.0)を指定する。結果も統計的な相乗平均(RMS)で出力される。

・応答スペクトル解析

多自由度系の最大応答値を計算する手法である。まず入力荷重を周波数ごとのスペクトル関数に変換し、１自由度系に分解した振動数ごとの振動系に作用させた各最大応答値を計算する。出力は各自由度ごとの最大応答値が出力され、横軸節点、縦軸最大値となる。各振動数のピークは必ずしもすべて同時に生じるわけではないので、後

処理として 2 乗和平方根などの数値的処理がされる。これは、概略の最大応答値のみを評価する方法で、簡易的方法と言える。

・非線形直接時刻歴応答解析

4-1-1 節で見たように、運動方程式の各項に非線形性が入ってくると、モード合成法は使えなくなる。モードの重ねあわせで任意の変形を表せなくなるからである。そのような場合、モード空間に変換することなく、直接時間軸での運動方程式を時刻歴で解いていく必要がある。コンピュータの性能が向上した現在、非線形性もある程度考慮できる直接時刻歴応答解析を実施する場合も多くなっている。これは、各瞬間の運動方程式を時間軸のまま、初期値より逐次計算していくものである。荷重、減衰値、剛性なども時間軸で変化させることもできる。また、荷重増分的に行っているので、材料非線形、大変形、接触（衝突）なども扱える。但し、数値計算の安定性や最小固有周期などから、一般に時間刻みをかなり小さくしなければならず、計算コストが膨大になる傾向がある。

最後に、図 4-2-20 に有限要素法により振動解析を検討する際のステップを示す。

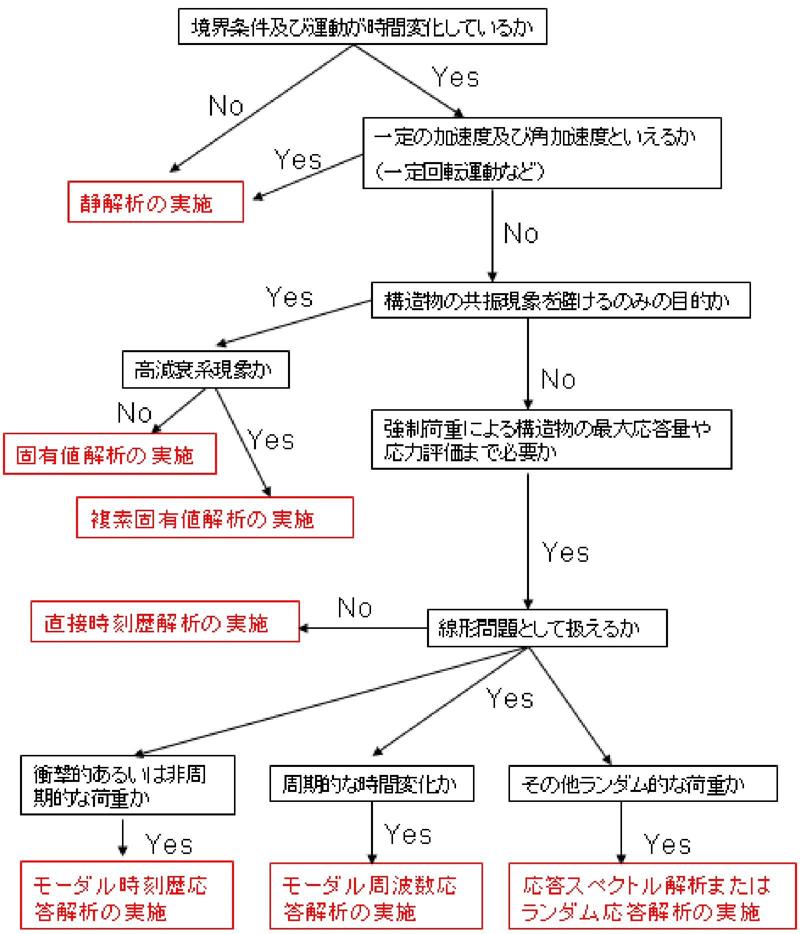


図 4-2-20　振動解析のステップ

4-2-4 振動解析を効果的に行うための注意点とそのノウハウ

1） 単位系

動解析では、材料の重さが必要になる。その際、重量密度で入力するのか質量密度で入力するのか問題になる。マニュアルに明記してあればよいが、不安な場合は自重を与えて支持点の反力を見てみることである。反力の合計が製品の重さになっているはずである。もしなっていなければ、密度及びその他単位系をチェックする必要がある。

2） 境界条件

拘束条件により結果が異なることは、先にも述べたが、実際の拘束条件を再現するのは難しい。現実には完全固定はなく、ある程度のばね支持になっているはずである。自分自身と同程度の剛性の支持台であれば、完全固定よりはばね支持とすべきである。また、単に床に置かれている構造物の場合も、完全固定よりもピン支持かすべり面支持の方がより妥当であろう。更には、拘束条件を付けず、完全フリー状態で解析することも可能であり、その方が実際と合う場合もある。その際は、物理的に意味の無い剛体モードは無視して結果を評価することになる。

3） 荷重条件

その製品にとって外力が、強制変位的なのか力的なのか、周期的なのか衝撃的なのか、変位量か速度か加速度かをはっきりさせる必要がある。いずれも変動荷重であるため、自分が入力した荷重をグラフで出力し、確認しておくことも大事なことである。

4） 減衰条件

先にも述べたが、正確な減衰値を予め入力することは難しい。厳密には減衰とは実験結果あるいは計算結果から求まるものだからである。しかし、おおよその値は今までの知見よりわかっており、また、幸いにも長い時間での応答の変化や減衰装置そのもののような高減衰構造で無い限り減衰値は全体挙動には大きな影響は及ぼさない。しかし、共振点ピークを正確に求めたい場合などは、より正確な減衰値を求める必要がある。表 4-1-1 に構造物タイプ別の減衰比を示す[4]。一般の機械構造物は様々であり一概には言えないが、ブッシュなどの緩衝材などを特に使っていない組み立て部品で、数％(0.01～0.1)である。

表 4-1-1 構造物タイプ別のおおよその減衰比（「振動の工学」鈴木浩平著　丸善より抜粋）

道　路　橋	0.02～0.05	電力施設用配管	0.002～0.18
吊　り　橋	0.002～0.08	蒸気発生器	0.007～0.05
鋼構造タワー	0.002～0.03	球形タンク	0.03～0.05
中低層建物〔1～10階〕	0.005～0.12	パネル構造物	0.01～0.04

ここで、入力方法としは、減衰比で入力する方法と減衰係数そのものを入力する場合があることに注意する必要がある。減衰比は先に出た臨界減衰係数との比であり、無次元量である。減衰係数は物理単位を持った値であり、単位系に注意して入力する必要がある。

５）メッシュ分割

メッシュは、各モードパターンが正確に表現できるために十分細かくする必要がある。当然、高周波モードまで考慮するとなると、モードパターンが複雑になるためより細かいメッシュが必要になってくる。基本的には静解析と同じように、メッシュ分割を変えても大きく解が影響受けなくなるまで、細かくする必要がある。注意点としては、静解析では力の流れを考え、応力の集中する部分だけを細かくしてく方法が一般にとられるが、振動解析では、波が構造体全体を伝播・反射しており構造全体を細かくする必要がある。振動というより衝撃的な荷重による瞬間的な挙動を見たい場合は、1計算 step あたり応力波が伝播する距離が1メッシュサイズを超えないようにするという条件もある。

６）各種数値解析手法と精度

6)-1　固有値解析

内力状態により剛性が変化する現象がある。引張り応力場では硬くなり、圧縮応力場では柔らかくなる（余談であるが、圧縮による剛性低下が座屈の原因である）。したがって、外力荷重・自重・熱応力などを考慮して固有値解析を行わないと、実際と合わない場合もある。

6)-2　モーダル周波数応答解析

何次までのモードを合成するかは、ユーザーが決めることであり、少なくとも加振周波数以上は考慮する必要がある。たとえば、1～200Hz の加振源があったとすると、少なくとも 200Hz 以上（望ましいのは倍の 400Hz 程度）までのモード次数を用いるべきである。逆に高次モードを考慮しないことにより、簡単に高次の高周波モードを省略できる。高周波モードはばらつきが大きく基本振動には関係ないので、やたらと高次まで含めればいいというものではない。

周波数刻みは共振ピーク付近では特に細かくする必要がある。検討周波数範囲全体を細かい周波数刻みで計算しても良いが、一度解析した結果を見て、一番ピークの大きい周波数範囲のみを細かい周波数刻みで再計算する方が効率的である場合もある。減衰は、モーダル減衰、Reyleigh 減衰が可能である。

6)-3　モーダル時刻歴応答解析

何次までのモードを合成するかは、ユーザーが決めることであり、これは上記のモーダル周波数応答解析と同等である。これも、振動モードにどのくらいの高次モードまで考慮するかで決めることになるが、入力波形に含まれる高次振動数以上の振動モードは必要である。時間刻み幅であるが、これは採用した最高次のモード周期の 1/4 以下の細かさは必要である。また、入力波形を表現できるサンプリング間隔も必要である。更に、時間方向の計算は、時間積分法を用いており、その手法により安定して計算が出来る時間刻み幅の上限もある。従って、時間刻みを変えて何度か計算して、結果の違いを確認してみる必要がある。減衰は、モーダル減衰、Reyleigh 減衰、ダンパー要素が可能である。

７）結果考察と実験との比較

実験モーダルと理論解析とを比較することは多い。その際、モード形状自体が異なる場合は、拘束条件、結合条件、モデル化範囲を確認してみる。また、高次モードが異なる場合は、メッシュ分割を細かくしてみることも必要である。固有振動数が異なる場合は、材料物性値、荷重の有無等を確認する。まずは、モード形状の相関が取れれば、基本特性は模擬されていると考えられる。

荷重の振動数が低く（ゆっくり）なってくれば、静的な挙動に近づいていくはずであるので、静解析の結果を参考のためにチェックすることも有効である。また、静的な荷重に対して、衝撃的な荷重が作用した場合は、エネルギー的な考察により約 2 倍の応答が出ることが知られている。その知見からおおよそのチェックを行うこともできる。

８）コンピュータ資源、その他

振動解析では、特に計算時間やメモリー、ハードディスクなどのコンピュータ資源を多く使用する。自分が使用するマシンで、どのくらいのモデルまで解けるのかを把握しておく必要がある。または、徐々にモデル規模を上げていくことになる。設計検討する際には、常に解析目的をはっきりさせ、精度と計算時間のバランスを取らなければならない。また、膨大な計算結果データから必要なデータを抽出することも必要になる。そのためには、本質を抽出したモデル化技術とともに、現象を理解するための実験的知見も必要になってくるであろう。