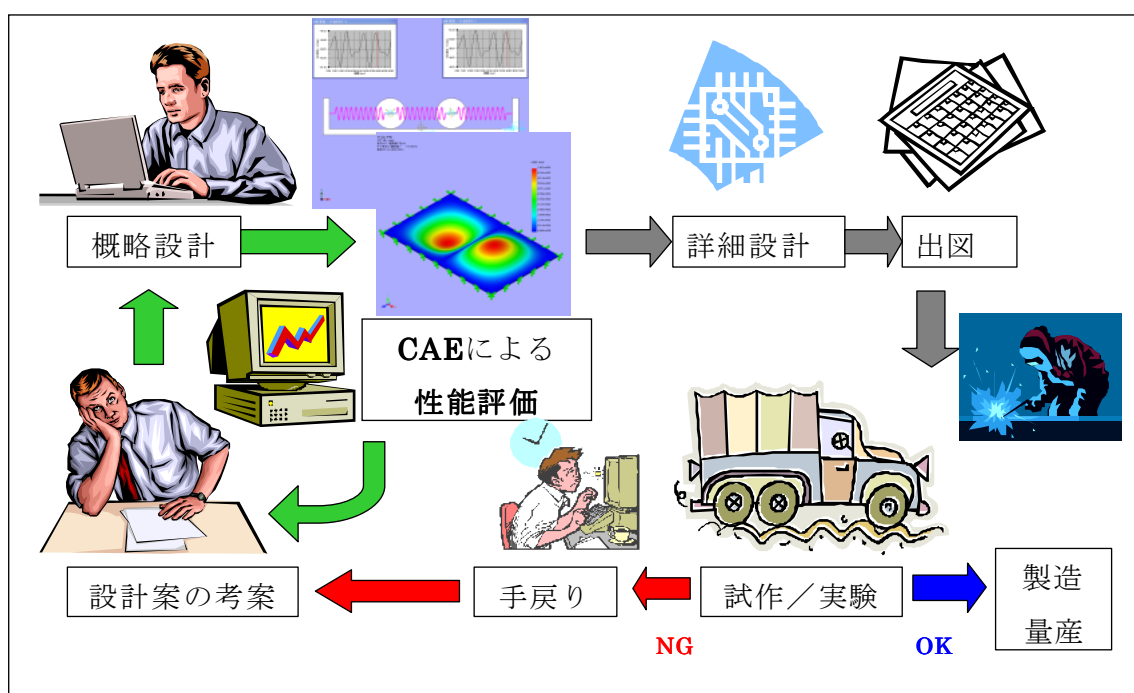


第4章 CAEによる振動現象の解析

第4章 CAEによる振動現象の解析

本章の狙い

前章までで、振動現象の基礎、観測/測定、実験モデルと学んできたが、本章では数値シミュレーションによる振動を学ぶ。1人1台のPC(Personal Computer)環境が当たり前でPCの性能が格段に向上している現在、数値解析を有効利用することのメリットは大きい。自分のPC内で振動現象を可視化し、好きなだけパラメータスタディが出来るのである。図4-1にCAEを活用した設計イメージを示す。図中の緑の矢印のように、詳細設計前にCAEを利用して様々なケーススタディを行い、その中での最善案を持って製作図面へと進めることが出来る。そのことにより、確認試験での合格確率が上がると共に、たとえ不合格であったとしても事前に現象を理解していれば対策も直ぐに立てることが出来る。また、その検討プロセス自体をドキュメントに残し、ノウハウとして次に生かすことが出来るのである。そのノウハウを蓄積することによって、試作や確認試験を減らしていくことが可能になる。



図

4-1 CAEを活用した設計

4章では、まず数値モデルによる振動現象を示し、その後、連続体モデルを扱うための有限要素法及び振動解析手法の概要を学ぶことにする。更に、事例を示すと共に、NASTRANを用いたブラケットの設計検討事例や金属バットの実験と解析の比較検討例を示す。

第1節 振動現象の数値モデルとシミュレーション

4-1-1 運動方程式によるモデル化

実際の振動現象を理解しようとするとき、実際に起こっている現象をよく観察することがまず考えられる。その際、実際に目で見て、耳で聞いて、触って観察することは、有効な方法ではあるが、人間の感覚では判断できないほど微小であったり、あるいは大きな現象であったり、またはとても危険な場合もある。また、高度な計測装置を利用できたとしても、実物実験ができない場合や実物がまだ無い設計段階で振動特性を把握しておきたい場合もある。そのとき用いられるのが、数学モデルに基いたコンピュータシミュレーション(computational simulation)である。

計算する上で重要となるモデル化(modeling)は、何を見たいのかを明確にした上で、実行可能な環境範囲で考えなければならない。対象とする構造物の複雑性と求める結果の精度により、モデルの大まかな自由度(degree of freedom)が決まってくる。一番の基本であり本質特性を1つの動きに集約した1自由度モデルから、多自由度モデル、連続体モデルへと自由度が増えていく。通常、まず数十自由度程度の基本特性抽出モデルを考え基本検討を行い、その後必要に応じて詳細モデルへと進めていくことになる。ここで、2自由度以上になると理論式や手計算による検討はもはや困難になってくるので、コンピュータシミュレーション(Computer Aided Engineering: CAE)を活用することになる。CAEでは、自由度の拡大は自然な形で行なわれ、大規模なモデルでも同じ手順で扱える大きなメリットがある。

次にモデル化の基本要素を見てみよう。第1章でも触れたように、振動現象を表現する数学モデルは(4-1-1)式の運動方程式で表される。またこのことは、今までの先人達の功績により数多くの実証実験でも確認されている。これは、ニュートンの慣性の法則(Newton's law of inertia)及びダランベールの法則(D'Alembert's law)より、各項の抵抗力の和が外力と時々刻々と釣り合いながら運動しているという現象である。

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (4-1-1)$$

ここで、m:質量、c:減衰係数、k:剛性、x:移動量、f:外力

第1項は、加速度に対する抵抗特性であり、慣性力の項である。質量を持っている物体に加速度が生じると運動変化を打ち消す方向に力(抵抗力)が発生する効果を表している。止まっている物体は動きにくく、動いている物対は止まりにくいという慣性の法則(law of inertia)現象を示している。

第2項は、速度に対する抵抗特性であり、減衰力の項である。速度に比例してやは

り運動変化を打ち消す方向に力（抵抗力）が発生することを表している。流体内の抵抗力やダンパーによる抵抗力が減衰力である。第1項と異なるのは、減衰力により使われるエネルギーは熱などの形に変換され外部環境に消散してってしまう点である。

第3項は、変位に対する抵抗特性であり、ばねによる復元力である。構造物の剛性と初期状態からの変位量（ズレ量）に比例する。すばやく初期状態からのズレを元にもどきたいという特性を持っている。

つまり、(4-1-1)式の運動方程式は、構造物が本質的に持っている3つの状態変化に対する物質の抵抗力特性と外力が常に等しい状態にあることを示している。

ここで、減衰項はエネルギー吸収器であり、振動現象の本質とは関係がないので、減衰のない運動方程式を(4-1-2)式に再掲する。また、外力はあってもなくても良いが、初期のみ外部から作用がありその後は作用しないとすれば、外力も0となる。

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4-1-2)$$

(4-1-2)式の両辺を積分して書き直せば、

$$\int m \ddot{x}(t) dt + \int kx(t) dt = C \quad (4-1-3)$$

ここで、 $dt = \left(\frac{dx}{\dot{x}} \right) dt = \dot{x} dt$ より

$$m \int \dot{x} \ddot{x} dt + k \int x \dot{x} dt = C \quad (4-1-4)$$

また、 $\dot{x} \ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{x}^2}{d\dot{x}} \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{x}^2}{dt}$

$$x \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{x}^2}{d\dot{x}} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{x}^2}{dt}$$

より、(4-1-4)式は、 $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = C \quad (4-1-5)$

(運動エネルギー) + (ひずみエネルギー) = 一定

となり、運動エネルギーとひずみエネルギーの和が一定というエネルギー保存の法則と運動方程式は等価であることが分かる[1]。

ここで、運動エネルギー=Cかつ、ひずみエネルギー=0 または運動エネルギー=0かつ、ひずみエネルギー=Cの状態は不安定で一瞬に崩れてしまうので、両者が0で

なくかつ減衰が無ければ両者の和が一定の状態、エネルギーのキャッチボールが永遠に繰返される。これが振動現象の本質である。減衰はこのエネルギーをサイクル毎に消費する機構であり、振動現象とは直接は関係のない熱力学的な現象である。

以上、数学モデルの基礎となる運動方程式の意味を再考してみたが、一般には線形範囲でモデルを考える。線形モデルとは(4-1-1)式の各項が比例関係にあるということである。以下に参考として、非線形項となる場合も紹介するが、通常は以下のことを踏まえた上で、線形モデルに置き換えてモデル化することが多い。その主な理由は、以下である。

- ・ 計算手法が簡略化され、より大規模モデルでも扱えるようになること。
- ・ 後述するモード解析が適用できること。
- ・ 微小振動の中に振動の本質が含まれており、振動対策検討には線形範囲でも十分有効な場合が多いこと。

第1項の慣性力項は、加速度と慣性力が図 4-1-1 のように直線関係にあることであり、その傾きが m に相当する。通常、 m が加速度に応じて変化することはないので、線形項として扱える。

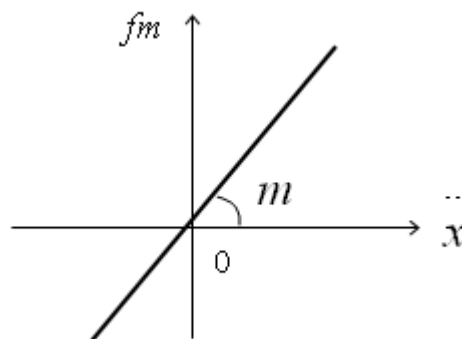


図 4-1-1 慣性項の関係

第2項の減衰力項は、速度と減衰力が図4-1-2のように直線関係にあることであり、その傾きが c に相当する。減衰効果は複雑な現象であり、実はこのように線形関係にならない場合も多いが、一般の減衰ダンパーの微小振動範囲では近似的に線形関係が成り立つので、速度比例型の減衰として扱うことが多い。以下、線形でない（非線形）減衰モデルも簡単に紹介しておく。このような現象の影響が大きい場合、別途減衰モデルを定義して非線形振動解析を検討する必要もある。図 4-1-3 に代表的な非線形減衰モデルの例を示す。

1) クーロン摩擦減衰モデル

摩擦による抵抗力 F_t は、(4-1-6)式のように垂直抗力 F_n と摩擦係数 u を介して比例して、一般には接触面積や速度の影響は受けない。

$$F_t = u \cdot F_n \quad (4-1-6)$$

このような摩擦は乾燥した摂動面で生じ、クーロン摩擦(Coulomb friction)という。

2) 速度2乗型減衰モデル

高粘性体や高速流れ場内での流体による減衰抵抗力は、おおよそ相対速度の2乗に比例することが実験等で知られている。

3) 材料減衰モデル

材料自体がヒステリシス(履歴)を描き、その往復経路の違いにより材料内部で散逸的減衰が起きる現象である。減衰ゴムや金属材料の弾塑性変形では、ヒステリシスを描き減衰器として使用される。このような減衰を履歴減衰(hysteretic damping)または材料履歴減衰(material hysteretic damping)という。

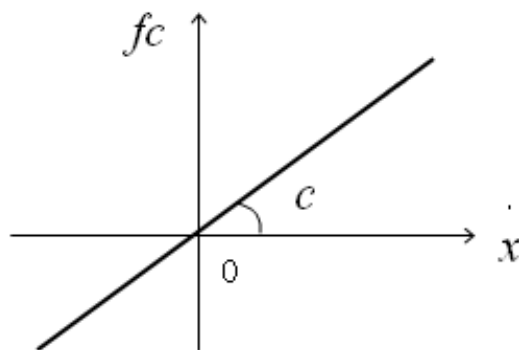


図 4-1-2 減衰項の関係

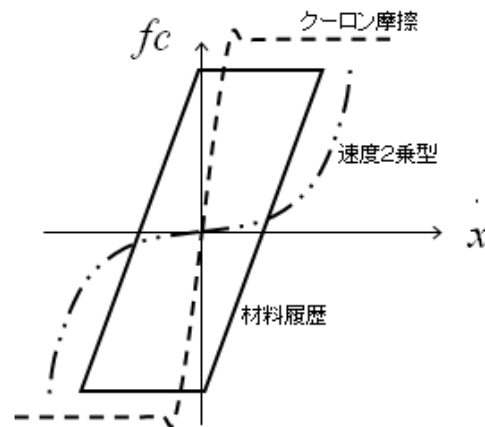


図 4-1-3 非線形減衰モデル例

第3項の復元力項は、変位と復元力が図4-1-4のように直線関係にあることであり、その傾きが k に相当する。通常、金属材料の微小変形では直線関係が成立するが、大きな変形により塑性域に入る場合やゴム材料、樹脂材料の場合は線形ではなくなるので注意が必要である。また、部品間にガタ、遊びがある場合も、直線関係には無くなる。この場合も、復元力特性が非線形領域に入るような現象では、非線形材料モデルによる非線形振動解析を行う必要がある。図 4-1-5 に非線形の代表的なばねモデルを示す。

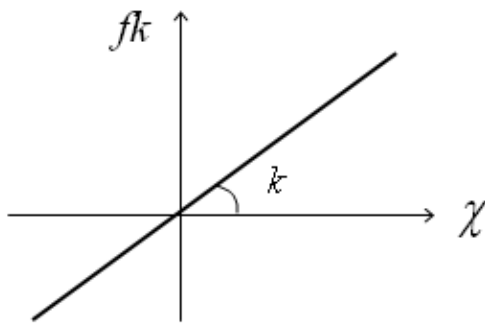


図 4-1-4 復元力項の関係

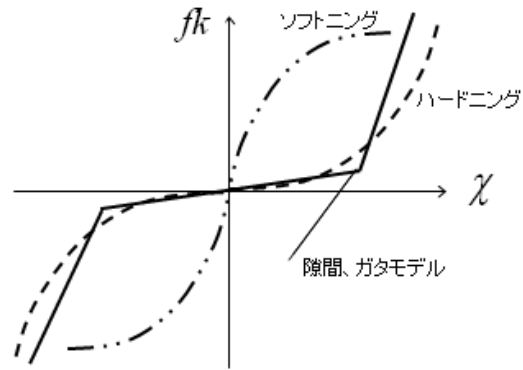


図 4-1-5 非線形ばねモデル例

4-1-2 シミュレーションによる振動現象の可視化

構造物の静的応答解析（静解析 static analysis）は、フックの法則に従い荷重方向に変形し、構造物の変形抵抗力と外力が釣り合う。その現象は感覚的であり分かり易い。それに対して、動的応答解析（動解析 dynamic analysis）（以下、単に振動現象と呼ぶ）は、複雑であり感覚的にも理解し難い場合が多い。しかし、複雑がゆえに、より実現象に近いモデル化であるとも言える。

振動現象は、外力が時間と共に変化しその応答も時刻歴で様々に変化するわけだが、静解析の感覚と大きく異なる現象に、荷重の大きさに応答が比例しない共振現象（resonance）と荷重の方向に変形しない位相遅れ（phase delay）現象がある。そのことを踏まえて、まずは、1自由度モデルから順次に見てみる。ここでは、振動現象を計算し可視化できる機構解析ツール COSMOSMotion（COSMOS シリーズは、米国 SRAC 社の商標です）を用いて解説する。シミュレーションツールでは前節と同じ運動方程式をベースにしているが、解くための簡略化はせず数値解析的に運動方程式の近似解を計算する。解法の内容は次節以降で説明するが、ここではシミュレーションツールを用いて振動現象を可視化し再確認してみる。

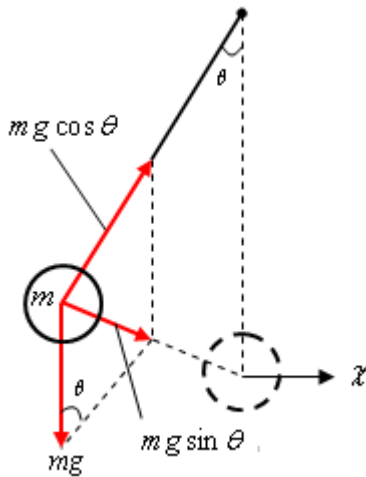
1) 1自由度自由振動モデル

1)-1 減衰なしの場合

まず、一番シンプルな1自由度の自由振動（free vibration）を見てみる。身近な、単振り子（simple pendulum）を観察してみよう。初期の安定状態（おもりが真下を向いて停止している状態）から、最初に多少外乱（エネルギー）を加えてやると、長さ1の振り子が振れ出し、摩擦や空気抵抗が無ければ永遠に同じ振幅で振れている。これは、図 4-1-6 のように、常に下向きに働く重力により、中心位置に戻そうとする振れ幅シータに比例した復元力が作用している。

慣性力と復元力の釣り合い式より

(慣性力と復元力は反対向き方向なので-が付く)



$$m \ddot{x} = -mg \quad (4-1-7)$$

ここで、 $x = l \cdot \ddot{\theta}$, $\sin \theta \cong \theta$ より

$$m l \ddot{\theta} + mg \theta = 0 \quad (4-1-8)$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (4-1-9)$$

図 4-1-6 単振り子に作用する力

これはばねでつながれた 1 自由度のおもりの運動と同じであり、等価ばね値を $K=mg/l$ と考えれば、(4-1-9) 式は減衰の無い単振動の(4-1-2)式と同じになる。これも、最下点で運動エネルギーが最大の時、位置エネルギー（ひずみエネルギー）が最小になり、両端点で運動エネルギーが 0 の時、位置エネルギー（ひずみエネルギー）は最大になる。それぞれの状態では安定せず、運動エネルギーと位置エネルギーのやり取りが繰り返され、振り子運動（振動現象）となっている。

図 4-1-7 は COSMOSMotion により単振り子の動きを計算した例である。図中の右側グラフは、上から振れ角度、速度、加速度の値を横軸を時間軸にとってプロットしたものである。いずれも同様な波形であるが、それぞれピーク位置に時間差が生じている。これが位相(phase)と呼んでいるもので、角度がピークの時、速度は 0、加速度は負のピークとなっている（図中グラフの赤い線参照）。通常、繰り返し運動を円運動に置き換えたときの角度で位相を表すことが多く、加速度に対して速度が 90 度遅れ、更に角度が 90 度遅れており、復元力と慣性力が反対方向に釣り合っていることが分かる。

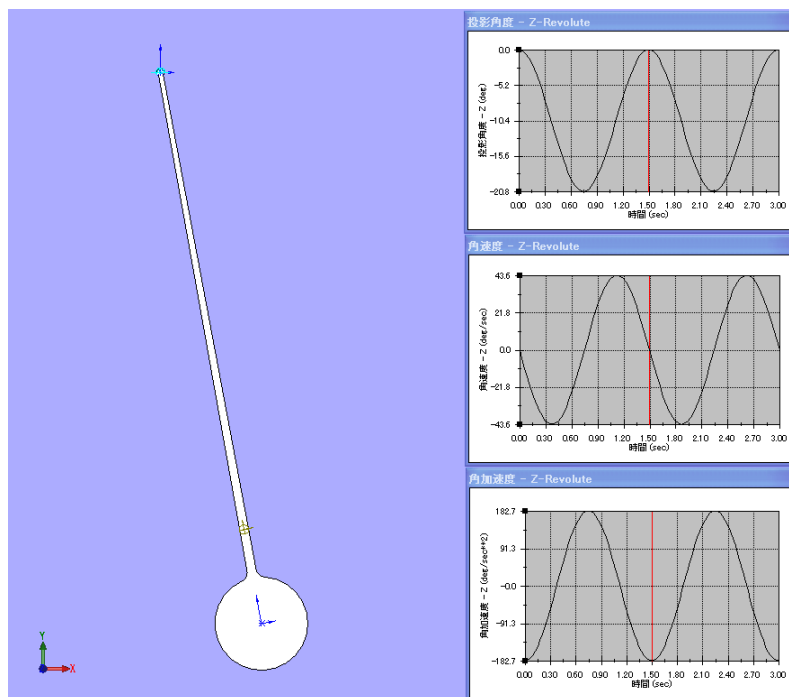


図 4-1-7 単振り子の解析モデルおよび角度・角速度・角加速度グラフ

また、ピーク点の時間間隔（時間幅）はいずれも同じことが分かる。これは、振り子の周期(period)と呼ばれ、単振動(harmonic vibration)の場合、以下のように求められる。

(4-1-9)式を満たす θ を考えてみると、2回微分して元の関数と足して0になるような関数形として、以下の式が考えられる。

$$\theta = c \cdot e^{-j\omega_0 t} \quad (4-1-10)$$

ここで、 $-j$ は虚数単位

(4-1-9)式に代入すれば、

$$\left(-\omega_0^2 + \frac{g}{l}\right)c \cdot e^{-j\omega_0 t} \quad (4-1-11)$$

(4-1-11)式が任意の時刻で常に成り立つためには、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (\text{rad/s}) \quad (4-1-12)$$

ここで、 f を振動数(frequency: Hz)、 T を周期(period: s)とすれば、

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (4-1-13)$$

これによれば、振り子の長さに依存し重さには無関係であることが分かる。これに、モデルのスペックである $l=0.6(\text{m})$ を代入すると、 $\omega=4.04(\text{rad/s})$ となり、 f は $0.64(\text{cycle/s=Hz})$ 、 T は $1.55(\text{s/cycle})$ となる。

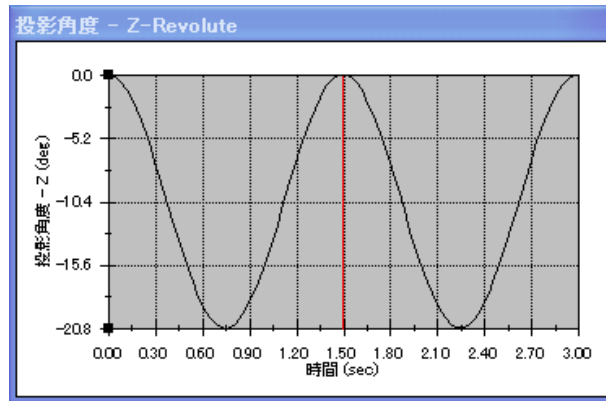


図 4-1-8a 振り幅約 20 度の場合（周期約 1.5s）

図 4-1-8a は振り幅約 20 度の場合の角度変化であるが、周期は約 1.5s であり理論解と一致している。若干異なるのは、解析モデルは完全な質点モデルではないためと思われる。ここで、振り幅がどんどん大きくなっていったらどうであろうか。図 4-1-8b に振り幅約 90 度、図 4-1-8c に振り幅約 127 度の場合の角度変化グラフを示す。(4-1-8) 式によれば振り角は微小と仮定しているの、理論式とは異なってくるであろう。実際に振り幅を大きくしてシミュレーションをしてみる。大きくなるほど、理論式の周期とずれてくるのが分かる。これは、理論式では解き易くするための線形化の仮定がされているからである。そして、大振幅の振り子になるほど周期が長くなっているのがわかる。このようにシミュレーションではいろいろな、より現実に近いケースが計算可能である。

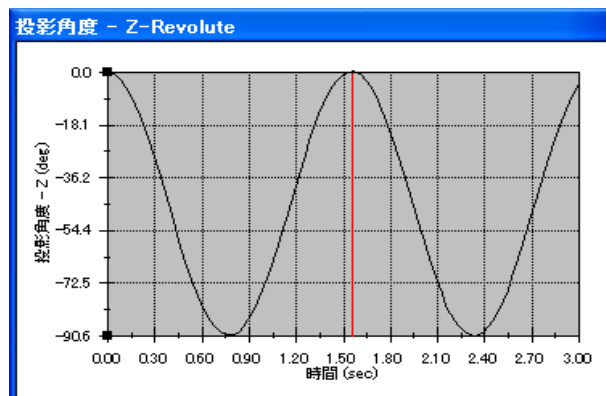


図 4-1-8b 振り幅約 90 度の場合（周期約 1.55s）

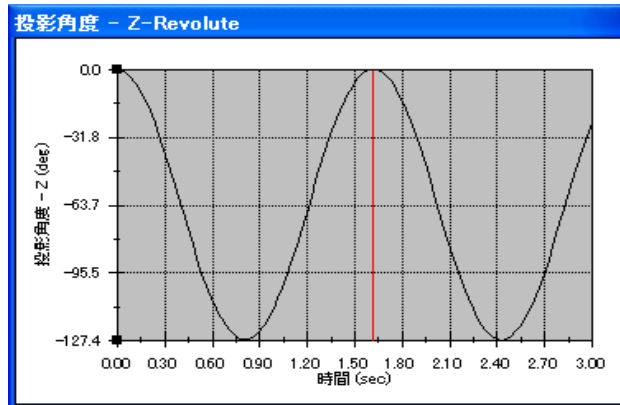


図 4-1-8c 振り幅約 127 度の場合（周期約 1.63s）

1)-2 減衰ありの場合

次により実際に近づけるために、減衰を付加してみる。4-1-1 節で述べたように、実際の減衰現象を正確にモデル化し減衰定数を定義するのは難しい。実際は、実験等により求めることになる。モデル上では、回転中心部に速度比例型の減衰効果を入れてみる。当然、減衰効果が小さければ自由振動に近く、大きければ振動すらなくなってくるのが予想される。この減衰量を調整してやると、ちょうど振動するかしないかの境界状態が生じる。この状態が一番早く振動を収束させる減衰量であり、臨界減衰値(critical damping coefficient)と呼ばれている。また、実際の減衰量と臨界減衰量の比を減衰比(damping ratio)と呼ぶ。単振動の臨界減衰値 C_c は、微分方程式の重根条件から、理論的に

$$C_c = 2\sqrt{mk} \quad (4-1-14)$$

となる。従って、臨界減衰比 η は、

$$\eta = C/C_c \quad (4-1-15)$$

で表される。単振り子の場合の等価ばねは $K=mg/l$ なので、このモデルの条件、 $m=0.94\text{kg}$, $g=9.81\text{m/s}^2$, $l=0.6\text{m}$ を代入すると、約 $C_c=7.6\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ となる。

つまり、減衰が小さい（減衰比 <1 ）といつまでも振動が収まらないし、大きすぎ（減衰比 >1 ）でも安定状態まで到達するのに硬すぎて時間がかかる。よって、最適値が存在することになり、精密機械やロボットアームの安定性などはこの臨界減衰値を目標にしている。簡単なモデルであれば、臨界減衰値は計算で求まるが、複雑なモデルでは、コンピュータシミュレーションが必要である。

この臨界減衰値を参考にして、以下に実際にシミュレーションを行なってみる。図 4-1-9a には減衰比 0.2 ($C=7.6\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}\times 0.2$)、図 4-1-9b に減衰比 1.0 ($C=7.6\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$)、

図 4-1-9c に減衰比 2.0 ($C=7.6\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}\times 2.0$) をそれぞれ示す。結果的に減衰比 1.0 の場合が一番早く収束しているのがわかる。但し、減衰比 1.0 では、一度行き過ぎてから収束するので、行き過ぎることが不可な場合は、減衰比 1.0 よりやや大きめの減衰量を調整する必要がある。

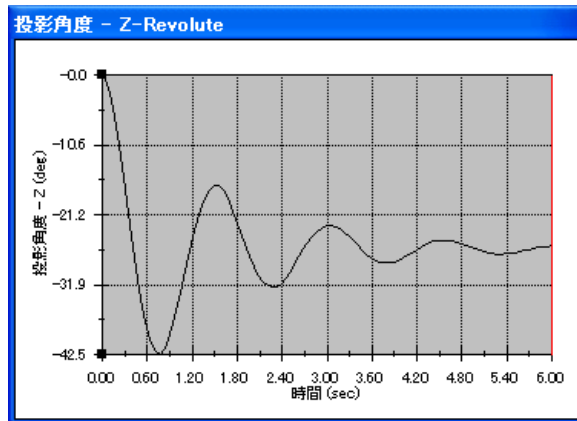


図 4-1-9a 減衰比 0.2 の場合の挙動

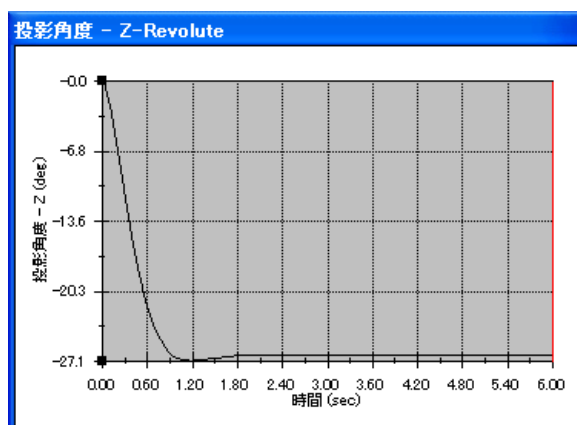


図 4-1-9b 減衰比 1.0 の場合の挙動

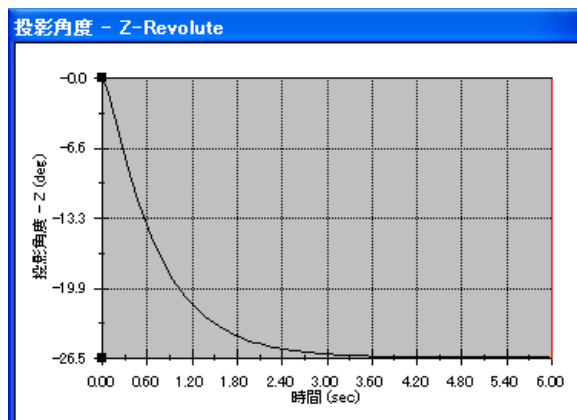


図 4-1-9c 減衰比 2.0 の場合の挙動

図 4-1-10 に振り幅約 20 度の場合の角度変化グラフを示す。減衰がない場合（図 4-1-8a）と比較してみると、振れ角が小さくなると共にピーク位置がずれ、なおかつ周期も多少長くなっているのが分かる。つまり、減衰により応答の遅れが生じるとともに、ゆっくりとした動きへと変化することになる。このような現象も単振動の場合には手計算で求めことは出来るが、複素数を用いるなど高度な数学が必要になる。多自由度系になるともはや手計算では求めることが出来ず、何らかのシミュレーションツールが必要になってくる。

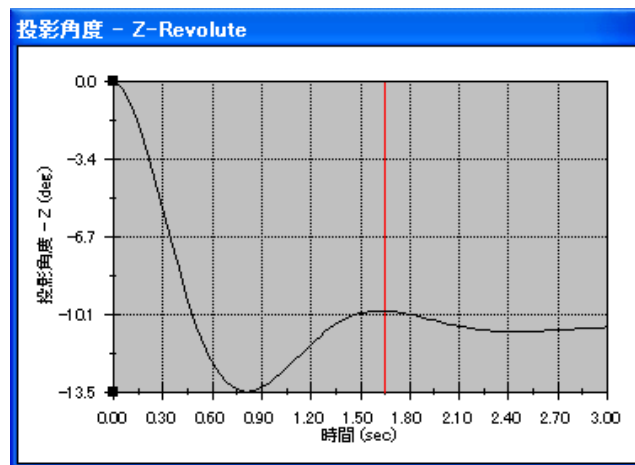


図 4-1-10 振り幅約 20 度の場合（周期約 1.65s）（図 4-1-8a と比較してみる）

2) 1 自由度強制振動モデル

次では、外力による強制振動(forced vibration)の場合を考える。自動車の走行、モータやエンジンからの振動伝達または地震などある構造物にとって強制振動を受ける場合も多い。したがって、ある周期的振動を受けた場合の構造物の応答を調べることは広い意味がある。

2)-1 強制変位加振の場合

まず、地震時や大きい振動体に取り付けられたブラケット部品のような、加振源が自分自身に関係なく振動する場合は外力を強制変位としてモデル化できる。この場合、加振源の周波数と構造物の固有周波数との関係により応答の状態が大きく変化することになるので、設計上最も注意すべきある。

図 4-1-11a より、強制振動がゆっくりのときは、振幅が 1 で位相も 0 であり、加振源と一体で動いているのが分かる。加振源とほぼ同じ振幅、周期で動き、その波形上に自分自身の細かな振動が重なり合っているのがわかる。図中グラフは、左側上から支持部の変位・速度・加速度を、右側はおもりの変位・速度・加速度を示す。

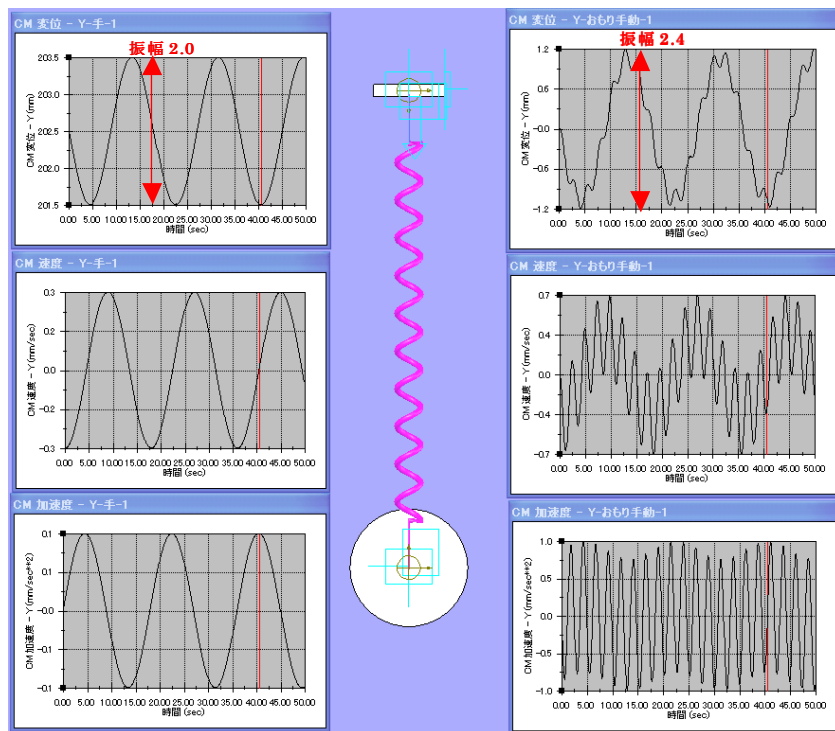


図 4-1-11a 強制加振による入力と出力の比較 (20deg/s で加振した時)

徐々に加振源の動きが速くなってくると、徐々に応答量も大きくなっていく。そして、図 4-1-11b のように、構造体の固有振動数と一致したときに応答量は時間と共に増大していく。この場合の固有振動数は、理論的には(4-1-16)式で求まる。このモデルの場合、 $K=1\text{N/m}$ 、 $M=0.153\text{kg}$ なので、約 $\omega_0=2.55\text{rad/s}(=0.4\text{Hz})$ となる。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{1(\text{N/m})}{0.153(\text{kg})}} = 2.55 (\text{rad/s}) \quad (4-1-16)$$

減衰が 0 の場合は無限大の時間で無限大の応答が出ることになる。これが共振現象である。共振時は、外力に対する抵抗力がなくなり繰り返し毎にエネルギーが供給され続ける。その結果、構造物の破損や破壊に至る可能性があり最も注意が必要である。また、図 4-1-11b より、固有振動数による加振をすばやく通り過ぎれば、決して無限大の応答にはならないので、加振時間も重要であることがわかる。

位相の方を見ると、共振点では 90 度であり、速度ピークのタイミングにあわせて加振されていることが分かる。ブランコを漕ぎ始めるときの感覚を思い出して欲しい。速度がピークの最下点で推進力を与えることにより、どんどん振り幅が大きくなっていくのが分かる (実際のブランコでは、重心位置を移動させることにより加速している)。

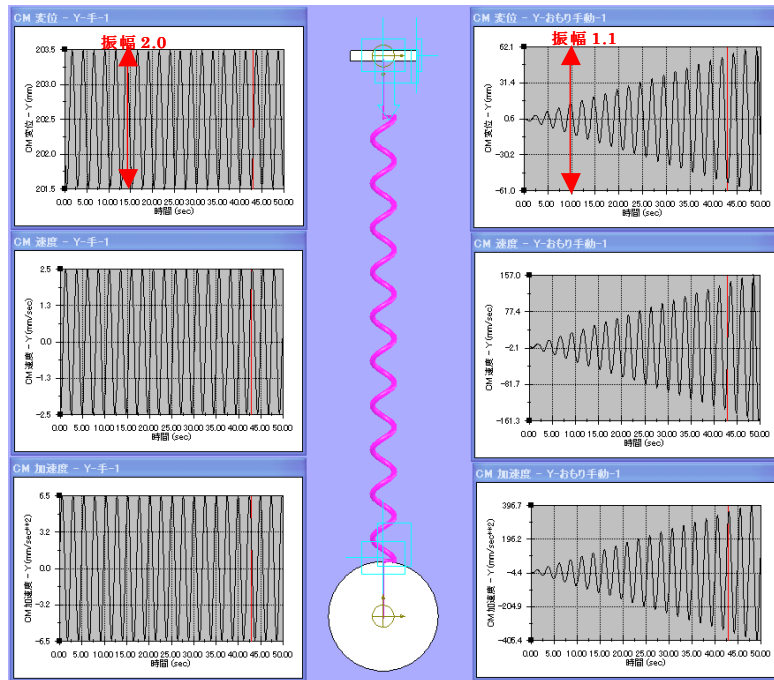


図 4-1-11b 強制加振による入力と出力の比較 (146deg/s で加振した時)

図 4-1-11c に更に速い振動数で加振した場合の応答を示す。共振点より速く動かすと急速に応答量は下がり始め、加振源の振幅より小さい応答にまでなっていく。位相は 180 度になり逆位相となる。これは、自身が加速している際に加振され、有効にエネルギーが伝達されていない状態であり、両者は打ち消す方向に作用するためである。

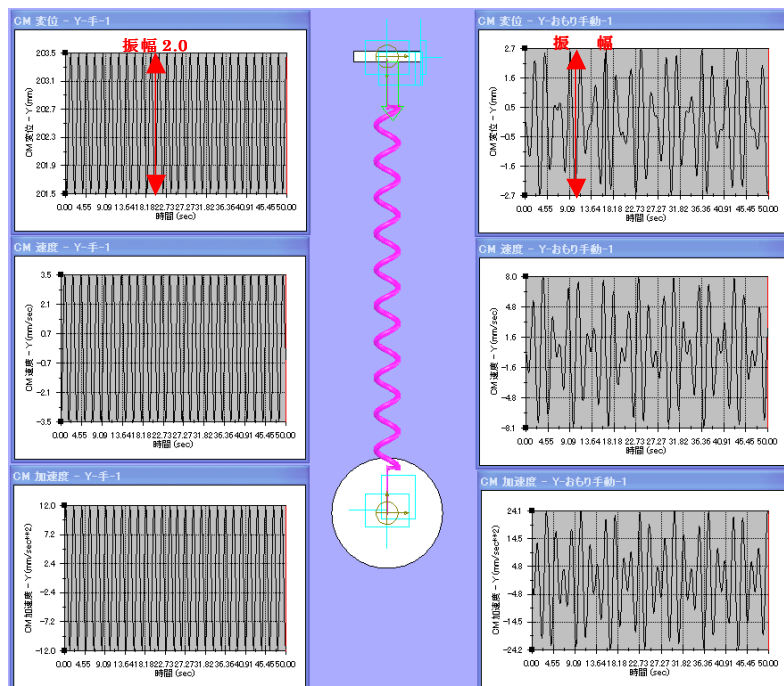


図 4-1-11c 強制加振による入力と出力の比較 (200deg/s で加振した時)

図 4-1-11d より、加振源が更に速く動くと、構造体は自分自身の慣性力により、もはや加振源の動きに全く追従できず応答レベルは 0 に近づいていく。

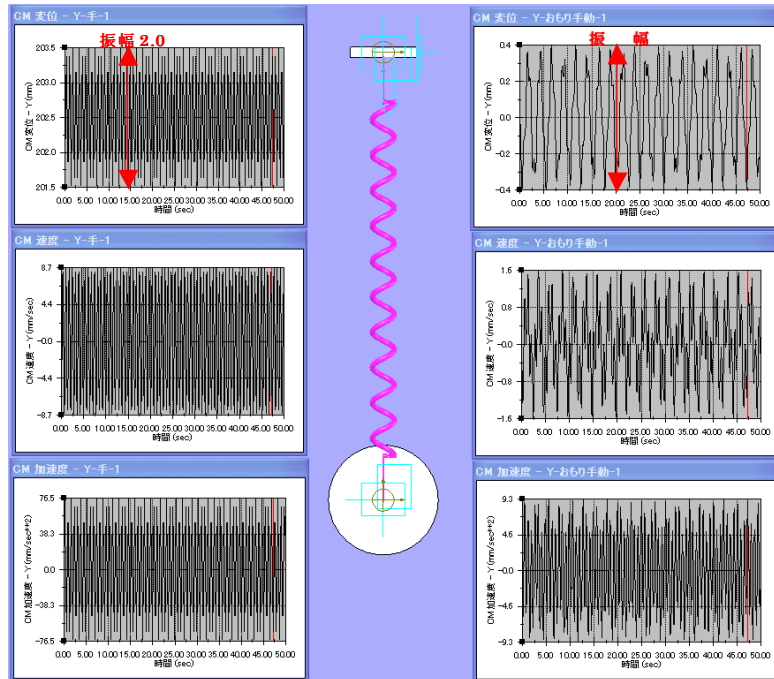


図 4-1-11d 強制加振による入力と出力の比較 (500deg/s で加振した時)

これらを、横軸加振速度として最大応答値をプロットしてみるとおおよそ図 4-1-12 のようなグラフが得られる。横軸に外力の振動数を構造物の固有振動数で割った値を示す。1 の場合両者が一致した状態である。縦軸は最大振幅量を強制変位量で割った値であり応答倍率(magnification factor of response)とも呼ぶ。図 4-1-13 は、同様に横軸を外力の振動数を構造物の固有振動数で割った値を示し、縦軸は変位応答の位相角を示す。これらは、それぞれ周波数共振曲線(harmonic resonance diagram)、周波數位相曲線(harmonic phase diagram)とも呼ばれる。モデルの減衰量の違いによって異なってくる。

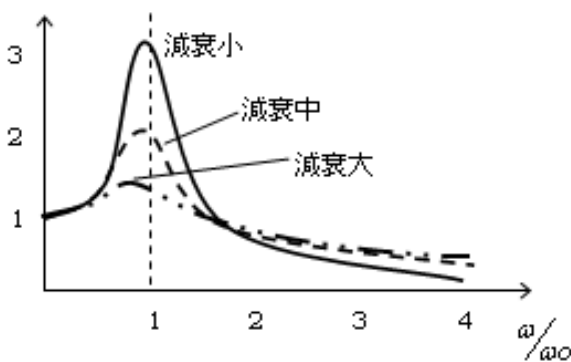


図 4-1-12 周波数共振曲線

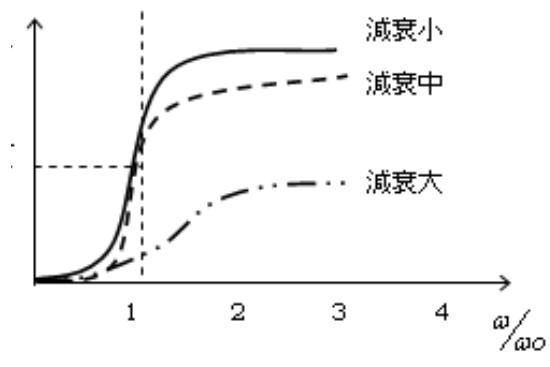


図 4-1-13 周波數位相曲線

2)-2 強制力加振の場合

次に構造体に対して相対的に小さい加振源が付いている場合を考える。これは、工作装置上でワークが回転している場合や、大きなタンクや配管にポンプなどが取り付いている場合に相当する。この場合、加振源からの外力は力としてモデル化できる。外力が強制変位であろうと力であろうと振動現象の本質は変わらないが、多少見方が変わるので、前節に合わせて示す。図 4-1-14 では、アンバランス量を持った回転主軸台を想定している。主軸回転数を徐々に上げていった場合の、工作装置の挙動を示している。図中左グラフは主軸支持部に発生する反力グラフであり、右グラフは、上から装置の変位、速度、加速度グラフである。このモデルの共振振動数は、理論的には(4-1-17)式で求まる。このモデルの場合、 $K=10\text{N/m}$ 、 $M=0.557\text{kg}$ （質量は台・回転体・アンバランス体の総和である）なので、約 $\omega_0 = 4.24\text{rad/s}$ ($=0.67\text{Hz}$)となる。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{10 \text{ (N/m)}}{0.557 \text{ (kg)}}} = 4.24 \text{ (rad/s)} \quad (4-1-17)$$

また、このモデルでは、加振力自体の大きさは、

$$F = m_0 e \omega^2 \sin \omega t \quad (4-1-18)$$

ここで、 m_0 : 不釣り合い質量、 e : 不釣り合い距離

となり、回転数の二乗で増加することである。そのとき、装置自体の応答も回転数の2乗に比例して変化するのであろうか。図 4-1-14a には、固有振動数よりも低い振動数で回転させた場合である。おおむね加振力に比例して応答しており、そこに自身の固有振動が重ね合わさっている。

ここで、前述の 2)-1 のおもりをばねで吊り下げたモデルも含めて、おもりの自重は外力として考慮しなくても良いのかとの疑問が出る。結論から言えば、運動方程式に自重分の外力は不要である。これは、自重とばね力が釣り合っている状態を振動の始まりとしており、自重分はばねの復元力と常に釣り合い、お互いにキャンセルされているからである。

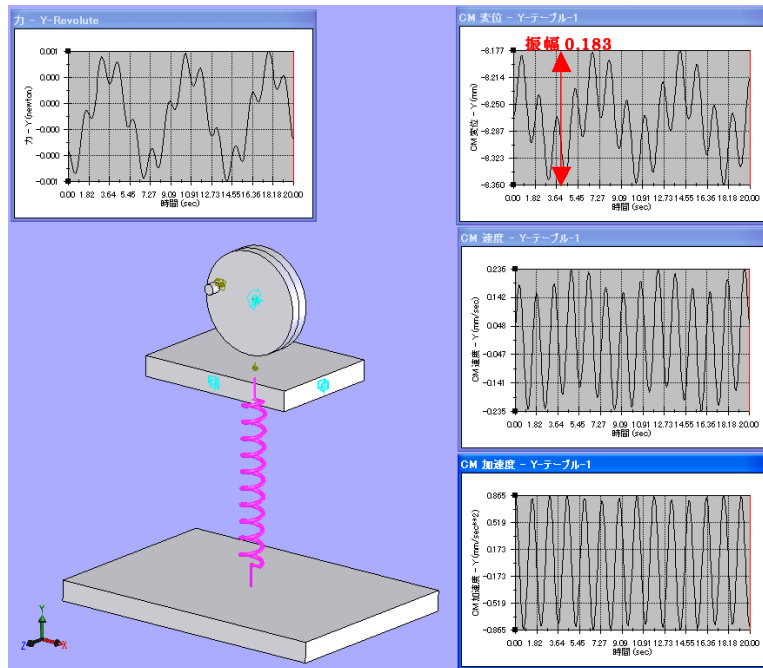


図 4-1-14a 強制回転力による入力と出力の関係 (50deg/s で回転させた時)

図 4-1-14b に、固有振動数よりは低いが、少し回転数を上げた場合である。約回転数の 2 乗に比例して応答が大きくなっている。

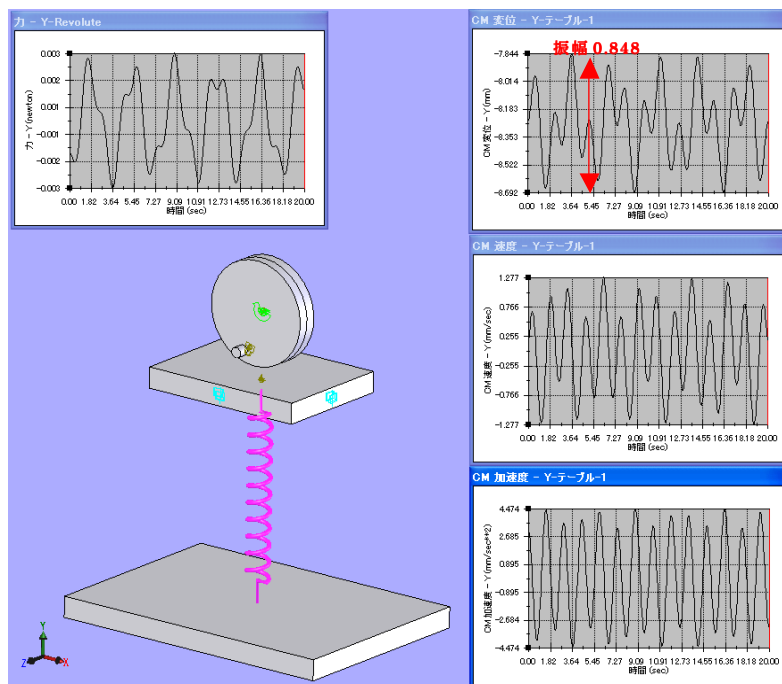


図 4-1-14b 強制回転力による入力と出力の関係 (100deg/s で回転させた時)

図 4-1-14c では、装置据付剛性の固有振動数と同じ振動数で回転させた場合である。いずれのグラフも共振現象を示しているのがわかる。

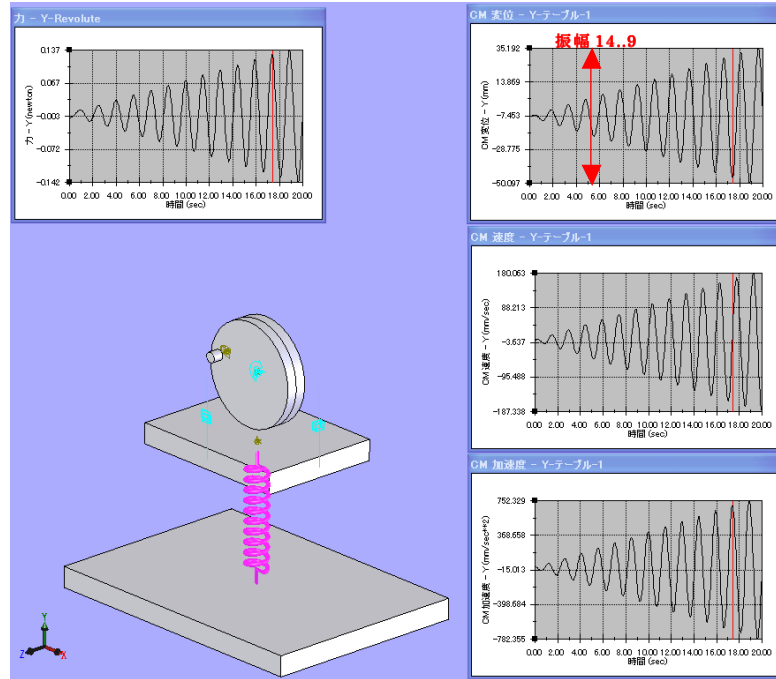


図 4-1-14c 強制回転力による入力と出力の関係 (243deg/s で回転させた時)

図 4-1-14d では、更に回転数を上げると急激に応答が減少している。やはり、外力周期とモデルの固有周期の波が重なり合っているのが分かる。

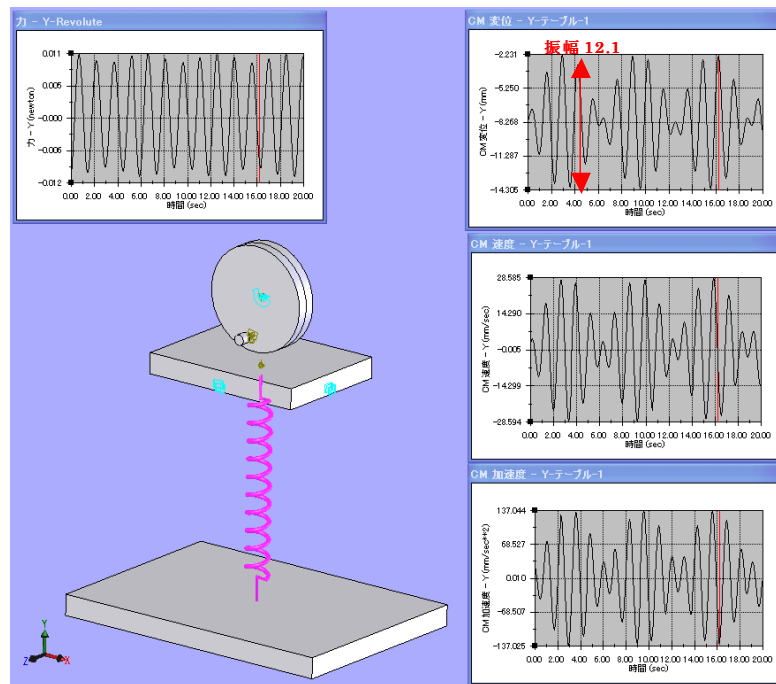


図 4-1-14d 強制回転力による入力と出力の関係 (300deg/s で回転させた時)

図 4-1-14e では、更に高速に回転させている。もはや、外力の大きさに反比例するように、応答量は減少している。

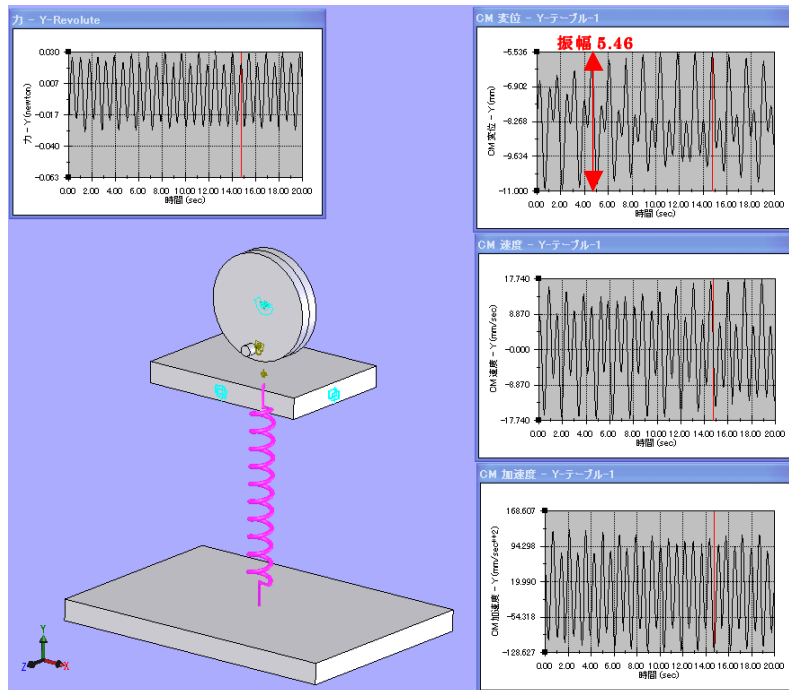


図 4-1-14e 強制回転力による入力と出力の関係 (500deg/s で回転させた時)

同様にこれらの現象を周波数特性の形でまとめると、図 4-1-15, 図 4-1-16 のようになる。前出の図 4-1-12, 図 4-1-13 では、ゆっくりの場合は強制変位と同じ動きをして、共振後は応答 0 に近づいていく。完全防振状態である。しかし、強制荷重の場合の図 4-1-15, 図 4-1-16 では、回転数 0 の場合は偏心力も 0 であり応答も 0 である。そこからゆっくり動き始めると偏心力に比例して（回転数の 2 乗に比例して）応答も大きくなる。共振点でピークを迎え、共振後は 0 にはならないが、偏心力は増加しているにもかかわらず、ある一定の応答に漸近していく。このような応答特性を把握しておかないと、設計上、破損を招いたりあるいは過剰品質を招くことになる。

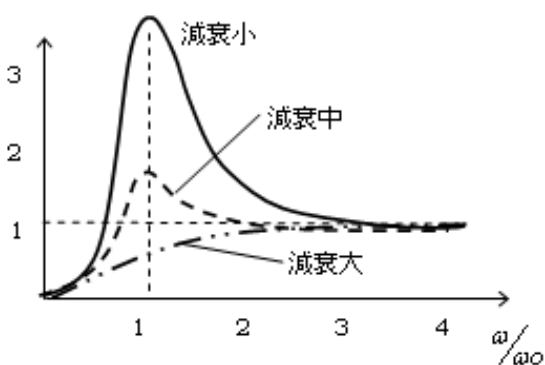


図 4-1-15 周波数共振曲線

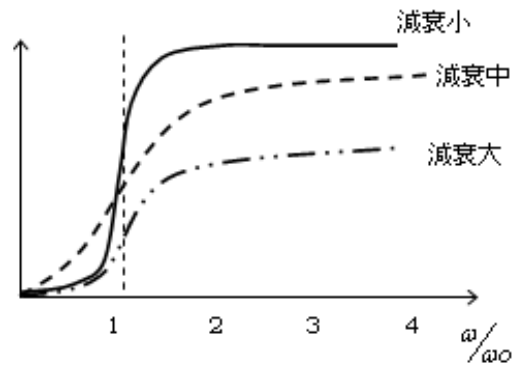


図 4-1-16 周波數位相曲線

3) 2自由度系の振動現象

今まで、一自由度モデルの振動現象を見てきた。そこには振動現象の本質が含まれており、より実現象に近い多自由度モデルが任意の荷重を受けた際の応答も、一自由度モデルの調和振動(harmonic vibration)の重ね合わせで表現できるからである。調和振動とは、正弦的(sin波)または余弦的(cos波)変化を示す振動である。

図4-1-17のように2つの物体が3本のばねで結合されている系に対して、外乱が生じた際の自由振動の様子を見てみる。以下、手計算によりマトリックスとして扱うと、2つの固有振動数が求まる。2つのおもりはそれぞれ質量m、ばねは両側2本はK、真ん中のばねは2Kとしている。

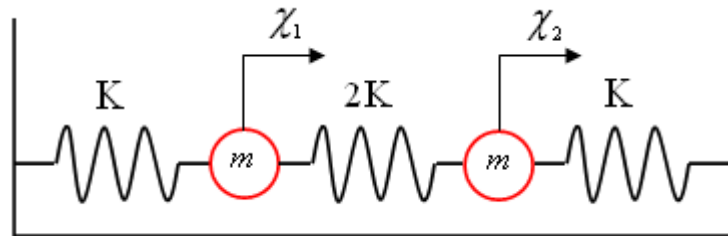


図4-1-17 2質点モデル例

それぞれのおもりに作用する力から、それぞれの運動方程式を立てると、

$$m \ddot{x}_1 + kx_1 + 2k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m \ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) + kx_2 = 0 \quad (4-1-19)$$

(4-1-19)式の特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} 3k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4-1-20)$$

これを整理して、

$$\begin{aligned} & (3k - m\omega^2)^2 - 4K \\ & = m^2\omega^4 - 6mk\omega^2 + 5K^2 \\ & = (m\omega^2 - k)(m\omega^2 - 5k) = 0 \end{aligned}$$

よって、上式を満たすための、(4-1-12)式に示す2つの固有振動数が存在する。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5K}{m}} \quad (4-1-21)$$

このとき同時に固有モード(eigen mode) (2つのおもりの変位量の比)が決まる。一般に、自由度の数だけ固有振動数と固有振動モードのペア(eigen pair)が存在する。(4-1-21)式で求めた2つの固有値を元の特性方程式に代入すると、

$$\begin{cases} r_1 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2K}{3K - m\omega_1^2} = \frac{2K}{3K - K} = 1 \\ r_2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2K}{3K - m\omega_2^2} = \frac{2K}{3K - 5K} = -1 \end{cases} \quad (4-1-22)$$

のそれぞれの固有値に対する固有モードが求まる。これは、2つのおもりの相対関係のみを表し、 r_1 ではそれぞれが同じ向きに1:1で振動すること、 r_2 ではそれぞれが反対向きに1:-1で振動することを現している。このことをシミュレーションで解析し、可視化してみよう。

最初に、外枠が振動する場合を計算してみる。まずは、1次の共振振動数より低いゆっくりとした動きを外枠に与えてみる。図4-1-18aのように、2つのおもりは左右同じように揺れ、外枠の動きにも同調しているのが分かる。外枠が右に動けば2つのおもりも右に、外枠が左に動けば2つのおもりも左に動く。図中、左上部のグラフはおもり1の変位、右上部のグラフはおもり2の変位、下部のグラフは外枠の変位を示している。

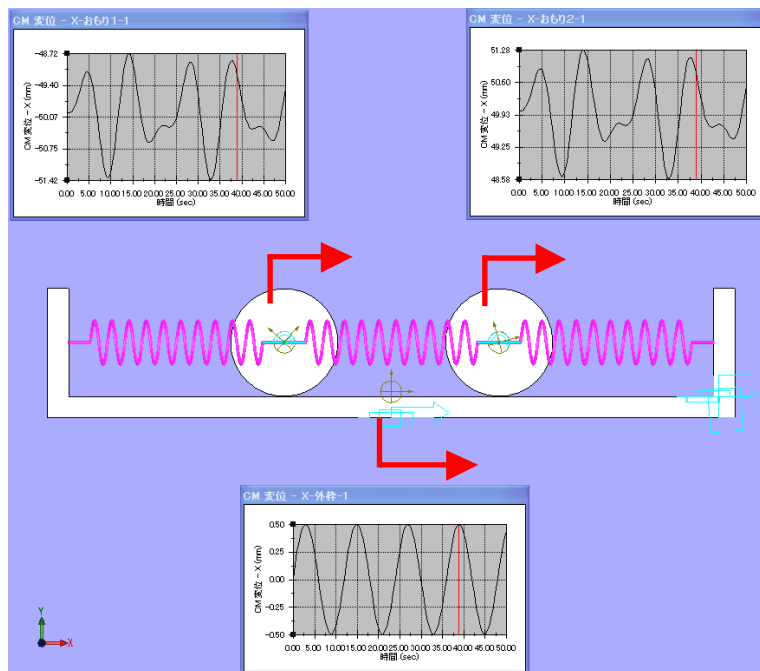


図4-1-18a 2質点モデルの振動現象 (30deg/sで外枠を振動させた時)

更に、外枠を速く動かして1次の共振振動数で揺ると、図 4-1-18b のように 2 つのおもりは全く同じ（同相で 1:1）に動くが、その移動量は時間と共に増大していく。1 次モードでの共振現象である。

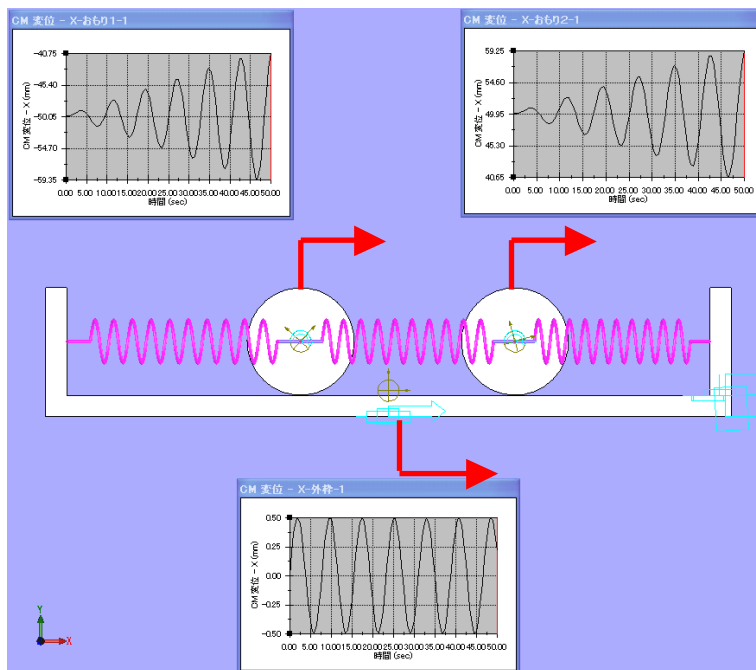


図 4-1-18b 2 質点モデルの振動現象 (46.3deg/s で外枠を振動させた時)

そして、共振点より速く動かしていくと、図 4-1-18c のようにおもり 1, 2 の動きは変わらず同一であるが、外枠の動きとは反対向きの動きになっている。1 次の共振点を境に、外枠の動きとは位相が反転しているのが分かる。

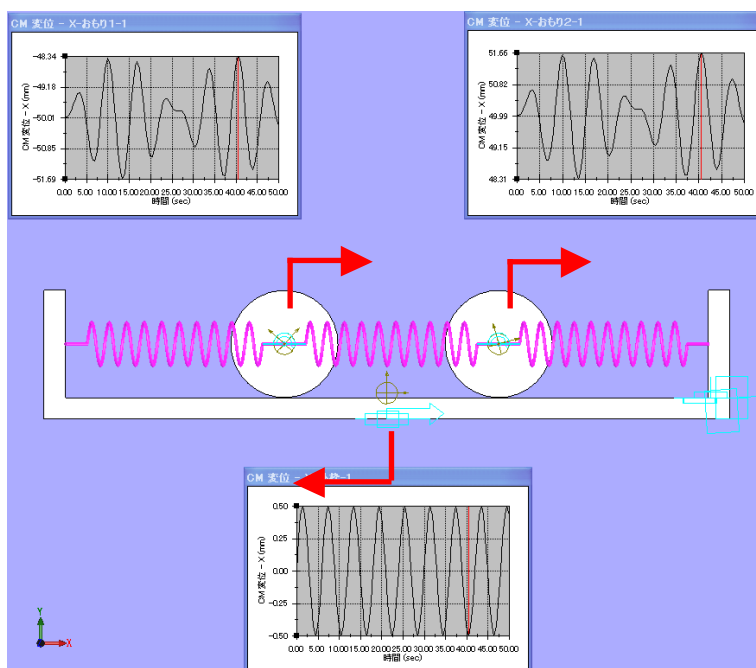


図 4-1-18c 2 質点モデルの振動現象 (60deg/s で外枠を振動させた時)

次に、2つのおもり間に相対的な力を作用させて振動させてみる。図 4-1-18d より 2つのおもりは逆相で動いているのが分かる。図中、下部のグラフはおもりに作用させている相対荷重である。荷重が外向きに作用すれば、おもりもそれぞれが外向きに動き、荷重が内向きに作用すれば、おもりもそれぞれが内向きに動く。

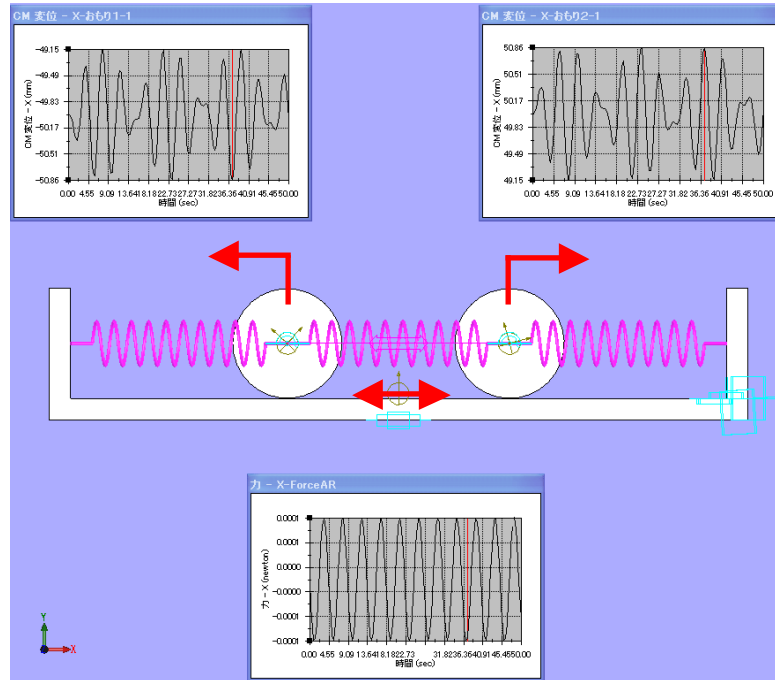


図 4-1-18d 2質点モデルの振動現象 (80deg/s で振動的相対力を与えた時)

荷重の振動数を上げ 2 次の共振振動数に達すると、図 4-1-18e のように、2つのおもりは逆位相のまま、振幅が増大していく。2次モードの共振現象である。

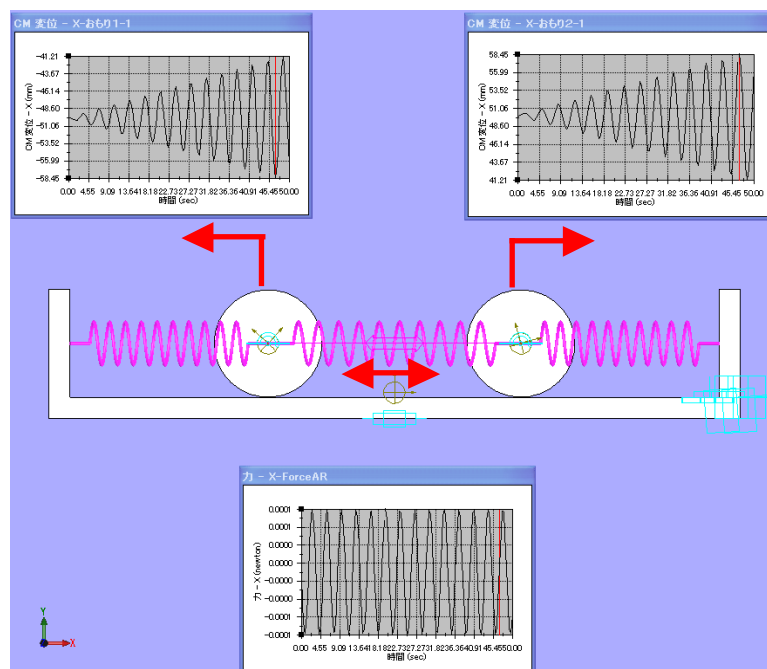


図 4-1-18e 2質点モデルの振動現象 (103.5deg/s で振動的相対力を与えた時)

2 次の共振点を過ぎた振動数で荷重を与えると、共振現象は収まるが、荷重と反対向きに動くようになる（図 4-1-18f 参照）。つまり、荷重の向きとおもりの向きが逆位相で振動していることになる。

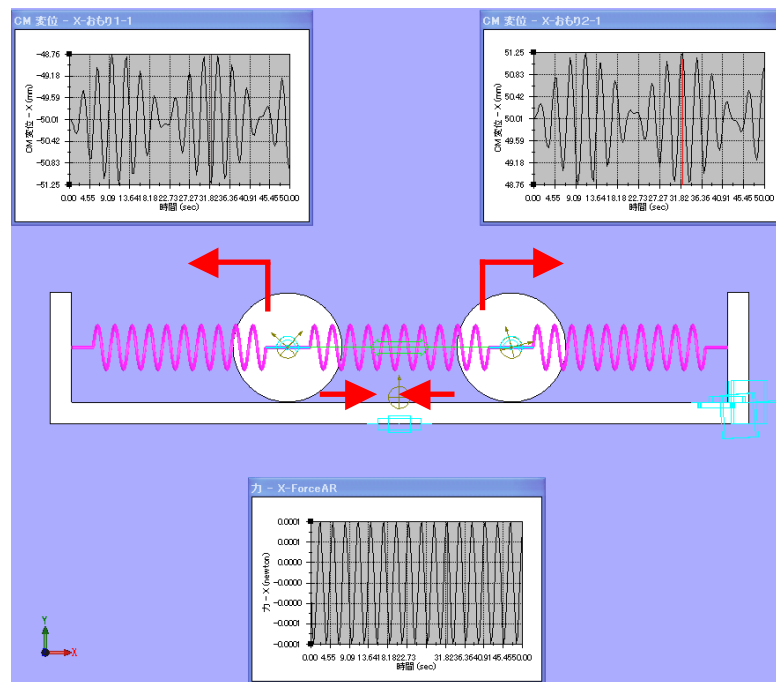


図 4-1-18f 2 質点モデルの振動現象（120deg/s で振動的相対力を与えた時）

これは、それぞれのおもりの運動が連成している（影響し合っている）ことになり、全体の挙動は複雑なものになる。しかし、運動を分解してみると実は、2 つの自由振動（正弦波）の重ね合わせで表現できることが分かっている。この 2 自由度系の議論は、そのまま多自由度系に拡張される。つまり、任意の振動は複数の調和振動の重ね合わせで生じているといえる。

最後に、以上の議論から振動現象を軽減させるためには、一般に以下の対策が検討される。

- ・共振点をすばやく通り過ぎる
- ・共振点をずらした剛性部材で支持する
- ・より高減衰のダンパーを取り付ける
- ・吸振器[2]と呼ばれる外力と共振するサブ部品を主部品に取り付け、主部品自体の振動を吸収させる

4) 連続体の振動現象

今まで、対象物を質点とばねでモデル化し、振動現象を運動方程式（微分方程式）に置き換え解いてきた。しかし、実際の構造物は、エンジンブロック、工作機械、飛行機の翼、ラケット、ギターの弦などソリッドモデルの連続体の形をしている。これ

は、今までのばね・質点系モデルと異なり、構造物の質量や剛性そして減衰効果が 3 次元的に連続して分布していることを意味する。理論的には、ばね・質点モデルを 3 軸方向に無限小に小さく分割していけば連続体に近づいていくわけだが、無限小のモデルを扱うことは出来ない。そこで、実際の連続体を近似的に扱う手法として有限要素法 (finite element method; FEM) が広く用いられている。振動現象に留まらず、様々な工学現象を解く汎用手法として利用されている。

有限要素法の簡単な原理及び、振動現象の数値解析法は次節に述べるが、ここでは平板形状の有限要素モデル及びその振動解析結果をまず見てみることにしよう。図 4-1-19a~h では、全周を固定された平板の固有振動数と固有モードを示している。図中の赤い部分は振幅の大きいところである。固有振動数の比較は図 4-1-22 にグラフで示している。シミュレーション上、固有モードの各節点の変位値が表示されるが、絶対変位量を示しているのではないことに注意が必要である。また、カッコ内の数字は、長辺:短辺のモード次数を示している。

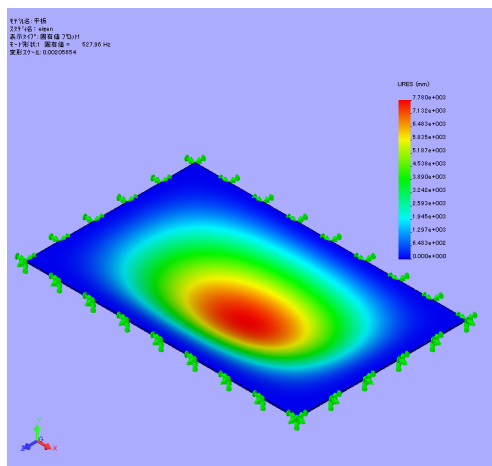


図 4-1-19a 1 次モード (1:1)

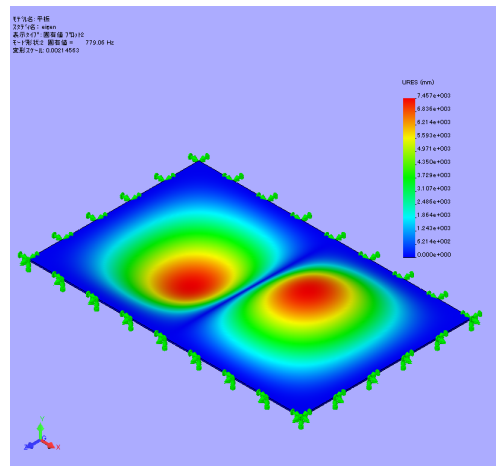


図 4-1-19b 2 次モード (2:1)

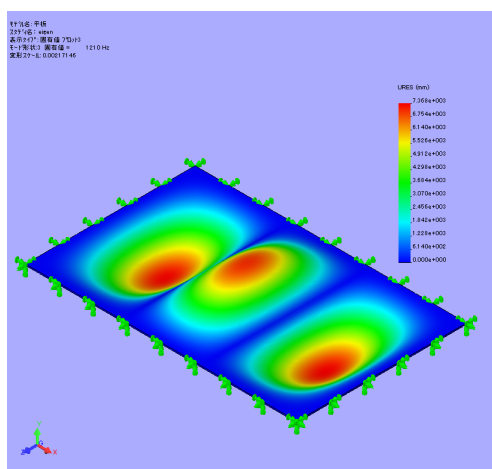


図 4-1-19c 3 次モード (3:1)

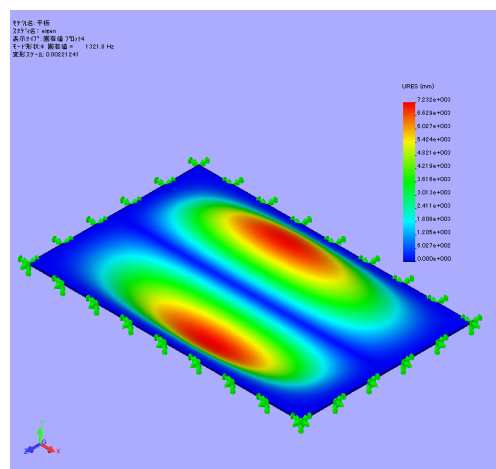


図 4-1-19d 4 次モード (1:2)

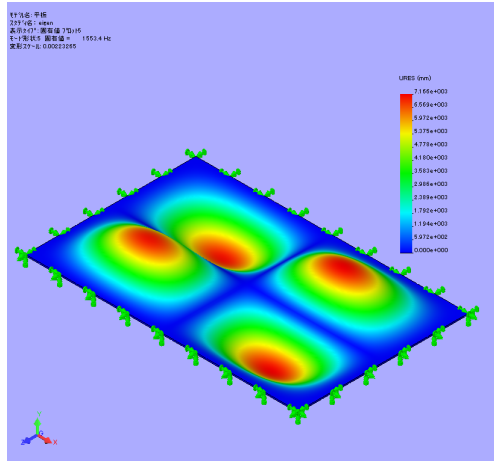


図 4-1-19e 5 次モード (2:2)

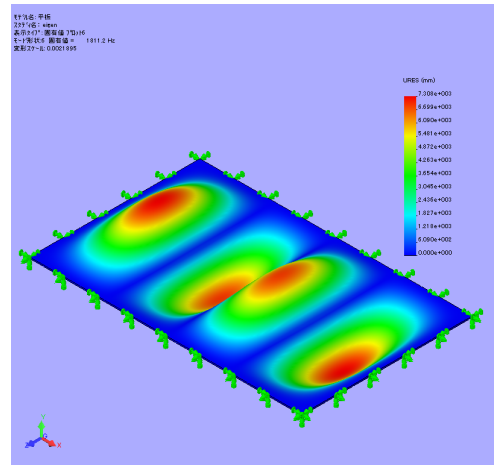


図 4-1-19f 6 次モード (4:1)

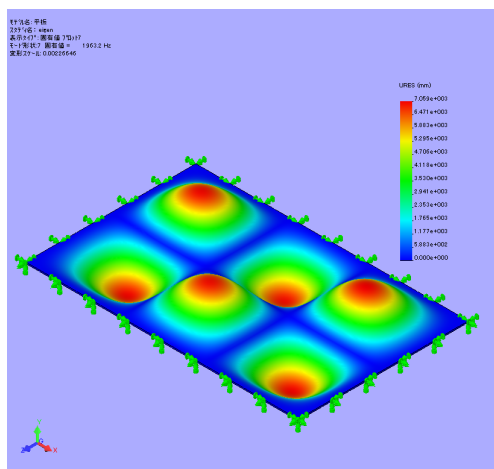


図 4-1-19g 7 次モード (3:2)

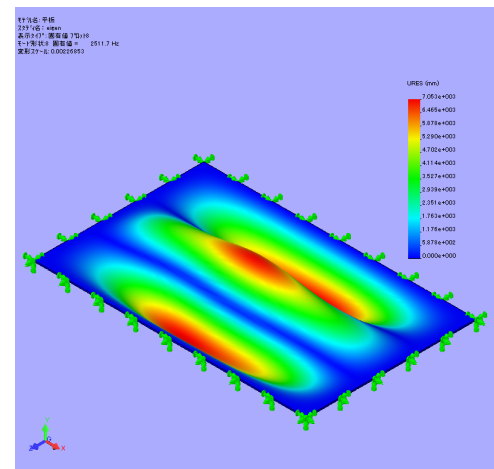
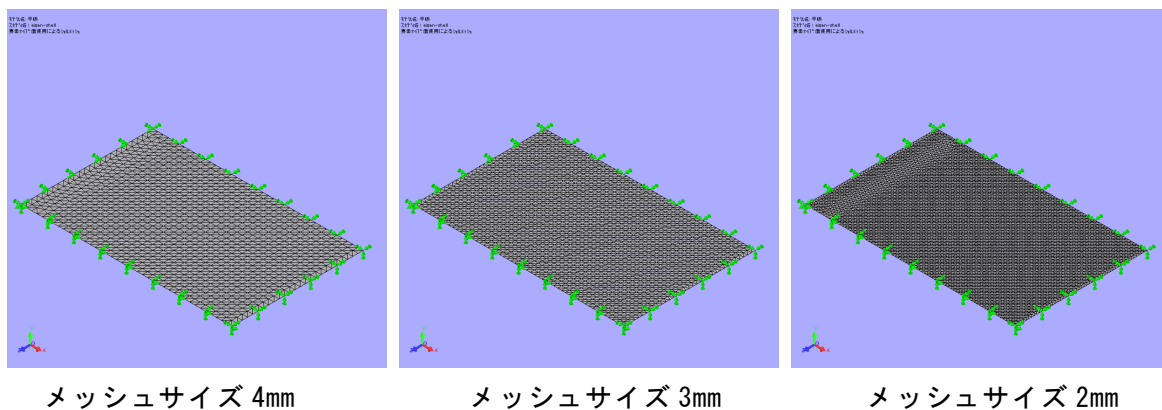


図 4-1-19h 8 次モード (1:3)

図 4-1-22 では、様々な場合の計算された固有振動数の差異を示している。有限要素法の理論及びシェル要素、ソリッド要素については次節で概説するが、大きな特徴として、計算メッシュタイプやサイズの違いにより答えも異なってくる可以说。この平板モデルもメッシュサイズを 4mm、3mm、2mm と徐々に細かくしたモデル（図 4-1-20 参照）を準備し、その解が異なることを示している。



メッシュサイズ 4mm

メッシュサイズ 3mm

メッシュサイズ 2mm

図 4-1-20 平板モデルで用いた計算メッシュの種類

図 4-1-21 のような矩形平板で全周ピン支持の場合は、理論解が弾性論的に比較的簡単に以下のように求まる。ここで、 E ヤング率、 ν :ポアソン比、 h :板厚、 ρ :密度、そして、 m, n は各辺方向の次数である（全周固定支持でモーメントも発生する場合の理論解は簡単には求められない）。

板の曲げ剛性を D とすると $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$ になり、固有振動数 ω は、(4-1-23)式で

表される。

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{D}{\rho \cdot h} \right)^{1/2} \left(\frac{m^2}{a_m^2} + \frac{n^2}{a_n^2} \right) \quad (4-1-23)$$

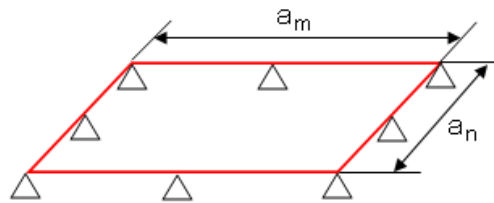
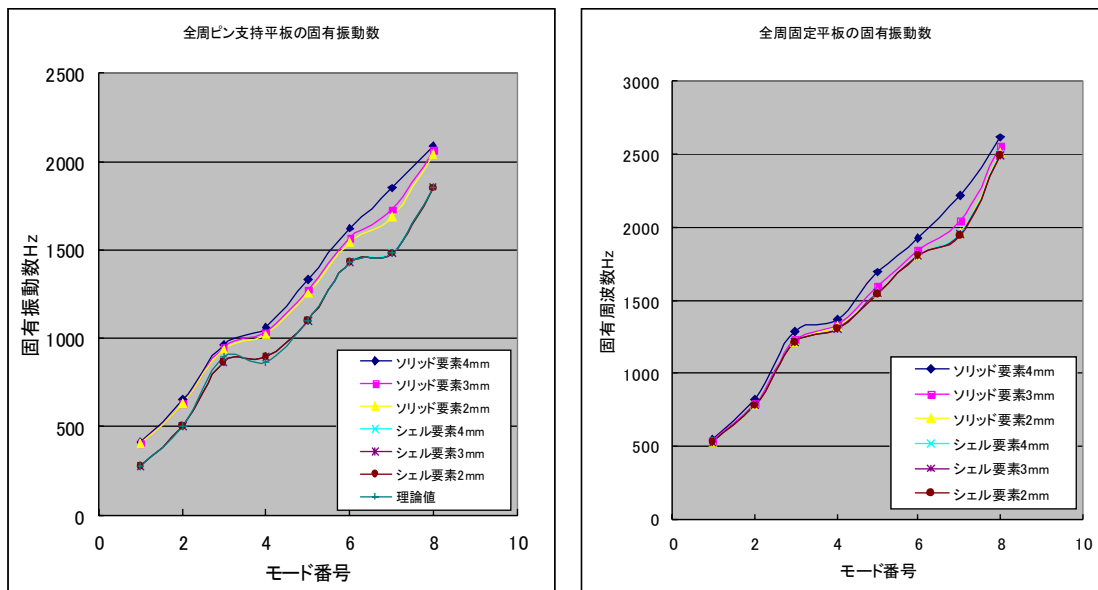


図 4-1-21 平板モデル

図 4-1-22 にソリッド要素、シェル要素、理論解との固有振動数の比較図を示す。グラフのいくつか重なっているが、シェル要素及び理論解はすべてほぼ重なっていることがわかる。全周固定だと、ソリッドとシェルの差が小さくなり、ソリッドでもメッシュを細かくすれば、シェル要素（これは理論解とも言える）に近づけることができる。このことから、平板のようなモデルではシェル要素の方が精度がよく、ソリッド要素でも細かくしていけば、シェル要素に近づけていくことができることがわかる。



注) 各点を線で結んでグラフ化しているが、区別し易くするために物理的意味はない。

図 4-1-22 各ケースの固有振動数比較

有限要素法では、軸方向剛性や曲げ剛性、形状、質量分布などを3次元方向で考慮しており、とても手計算では出来ないようなモデルでも、同じ手法で扱うことが可能である。薄い形状や厚い形状、または複雑な断面や穴が開いていても、モデルに合わせて計算メッシュを作成すれば、あとは同様の手順で計算が可能である。しかし、メッシュタイプやメッシュサイズの違いによる計算結果の差異を常に頭に入れておく必要がある。次節以降、有限要素法の理論と含めて計算上の注意点も述べることにする。