

第5節 フーリエ変換

振動解析を行う場合、振動波形を時間領域において観測することにより、波形の特徴を大まかに把握することができる。しかし、波形の観測だけでは振動の特性を解明することが困難な場合が多い。このため、時間領域の信号を周波数領域における信号に変換し、振動波形に含まれる振動数成分の大きさを分析する周波数分析が行われる。

時間領域の波形を周波数成分に分解することをフーリエ変換 (Fourier transform)、また逆に各周波数成分から時間領域の波形に合成することをフーリエ逆変換 (inverse Fourier transform) という。フーリエ変換を行うための前提条件としては、「連続的」な信号波形が「無限時間」に渡り与えられているものとしている。ところが、デジタルコンピュータで信号処理を行う場合にはセンサから入力される連続的な信号はAD変換により「離散的」な「有限時間」のデータに置き換えられている。このため、離散的なデータに対する離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform : DFT) が用いられる。

離散フーリエ変換は計算時間が非常にかかるので実用的ではない。このため、離散フーリエ変換を少ない演算回数で実行するアルゴリズムである高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform : FFT) が利用されている。

以下では、フーリエ変換の概念について説明する。

1-5-1 フーリエ級数

任意の周期関数は多数の三角関数の和として表すことができる (図 1-5-1)。すなわち、周期 $T = 2\pi / \omega$ の周期関数 $x(t)$ は、

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1-5-1)$$

と表せる。これをフーリエ級数 (Fourier series) という。式(1-5-1)を t について区間 $[-T/2, T/2]$ で積分すると、右辺において第1項以外は明らかにゼロなので、

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot dt = \frac{a_0 T}{2} \quad (1-5-2)$$

となる。式(1-5-2)から係数 a_0 が次のように求まる。

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1-5-3)$$

また、式(1-5-1)の両辺に $\cos \omega t$ をかけて、 $[-T/2, T/2]$ で積分すると、三角関数が正規直交関数であることから、係数 a_1 の項以外の値はゼロになるので

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega t dt = a_1 \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \omega t dt = \frac{a_1 T}{2} \quad (1-5-4)$$

となり、係数 a_1 が次のように求まる。

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega t dt \quad (1-5-5)$$

同様にして、式(1-5-1)の両辺に $\cos 2\omega t$ 、 $\cos 3\omega t$ 、 $\cos 4\omega t$ 、 \dots をかけて積分すると、それぞれ a_2 、 a_3 、 a_4 、 \dots が求まり、また $\sin \omega t$ 、 $\sin 2\omega t$ 、 $\sin 3\omega t$ 、 \dots をかけて積分することで、 b_1 、 b_2 、 b_3 、 \dots が順次に求められる。これらを整理すると、

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega t dt \quad (n=0,1,2,\dots) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega t dt \quad (n=1,2,3,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (1-5-6)$$

が得られる。このフーリエ級数の係数 a_n 、 b_n をフーリエ係数 (Fourier coefficient) といい、振動波形 $x(t)$ の中に含まれている周波数成分の大きさを表している。

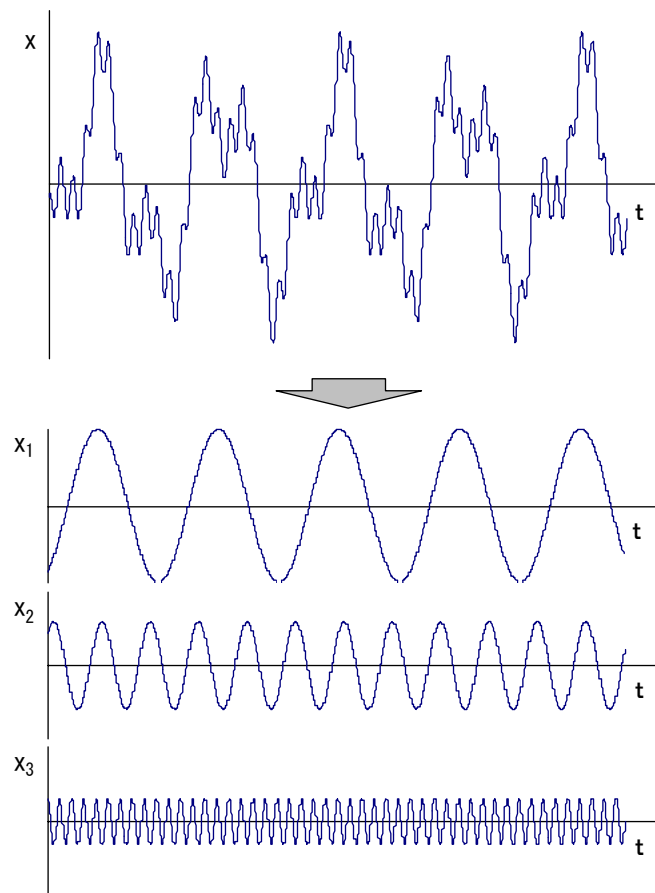


図 1-5-1 周期関数の分解 ($x = x_1 + x_2 + x_3$)

1-5-2 複素フーリエ級数

振動は振幅と位相差という2つの独立したパラメータで表される現象なので、これを複素平面上のベクトルで表現（複素数表現）すると1つの数で表現でき、計算上の取り扱いも非常に便利になる。

複素指数関数と三角関数の間の変換式であるオイラーの公式（Euler's formula） $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ を用いると、上述したフーリエ級数を複素数の形式で表現することができる。オイラーの公式より次の関係が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \cos n\omega t &= \frac{(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t})}{2} \\ \sin n\omega t &= -j \frac{(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t})}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-5-7)$$

式(1-5-1)に式(1-5-7)を代入すると、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) - \frac{jb_n}{2} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (1-5-8)$$

ここで、

$$\frac{a_0}{2} = X_0, \quad \frac{a_n - jb_n}{2} = X_n, \quad \frac{a_n + jb_n}{2} = X_{-n} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (1-5-9)$$

とおくと、式(1-5-8)は、次式のように複素フーリエ級数となる。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t} \quad (1-5-10)$$

ここで、式(1-5-10)の両辺に $e^{-jn\omega t}$ をかけて、 $[-T/2, T/2]$ で積分すると、 $e^{jn\omega t} \cdot e^{-jn\omega t} = 1$ の関係があるので、複素フーリエ係数が次式のように導かれる。

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-5-11)$$

関数 $e^{jn\omega t}$ を角振動数 $n\omega$ の調和運動と考えれば、関数 $x(t)$ は大きさ X_n の調和運動 $e^{jn\omega t}$ を重ね合わせたものとなる。

1-5-3 フーリエ変換

関数 $x(t)$ が周期関数ではない場合には、フーリエ級数に展開することはできない。ただし周期 T を無限大とすることで、非周期関数も無限の周期を持った周期関数であると考えることができる。

いま便宜上、基本振動数 $\omega = 2\pi/T$ を ω_0 と表し、 $n\omega_0 = \omega_n$ とおくことにする。

式(1-5-10)より、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X_n}{\Delta\omega_n} e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n \quad (1-5-12)$$

が得られる。ここで、 $\Delta\omega_n$ は隣り合った振動数の間隔で、

$$\Delta\omega_n = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1-5-13)$$

である。式(1-5-12)の両辺に $e^{-j\omega_n t}$ をかけて、 $[-T/2, T/2]$ で積分して、式(1-5-13)の関係を用いると、

$$\frac{X_n}{\Delta\omega_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (1-5-14)$$

が得られる。式(1-5-12)、(1-5-14)において $T \rightarrow \infty$ ($\Delta\omega_n \rightarrow 0$) として、 ω_n 、 $\Delta\omega_n$ 、 $X_n/\Delta\omega_n$ をそれぞれ ω 、 $d\omega$ 、 $X(\omega)$ とおくと、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-5-15)$$

および

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-5-16)$$

が得られる。式(1-5-16)は時間領域の任意の関数 $x(t)$ を周波数領域の関数 $X(\omega)$ に変換するものでフーリエ変換といい、式(1-5-15)は逆に周波数領域の関数 $X(\omega)$ を時間領域の関数 $x(t)$ に変換するものでフーリエ逆変換とよばれる (図 1-5-2)。

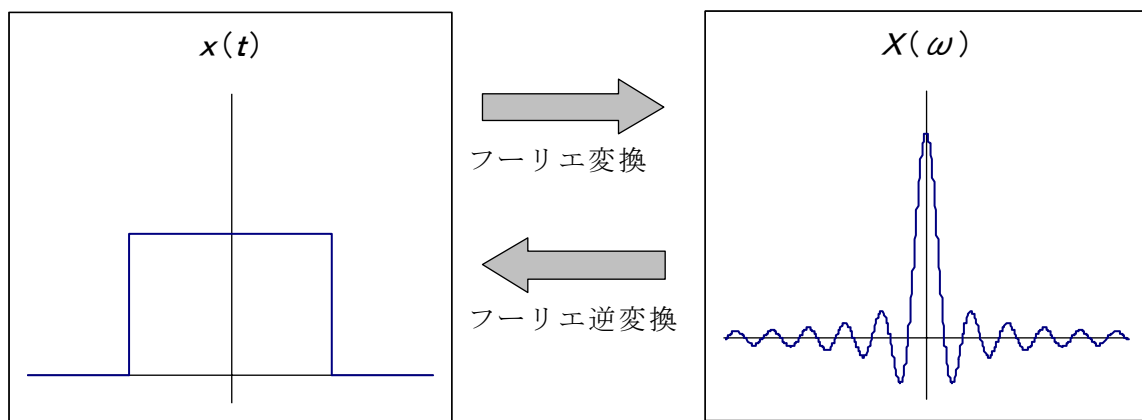


図 1-5-2 フーリエ変換