第４節　モデル化と運動方程式

1-4-1　モデル化

機械や構造物の有害な振動の発生を抑制するため、あるいは振動を有効利用するためには、現象の本質を押さえた単純なモデルを構築し、その発生メカニズムを把握することが肝要である。実際の機械や構造物は質量や剛性が系内で連続的に分布している分布系（distributed system）と考えることができる。しかし、分布系の解析には高度な数学的知識が必要となり、複雑な機械全体を分布系としてモデル化（modeling）することは困難である。このため、機械や構造物の各構成要素を有限個の質点に分割し、これらをばねと減衰とで結合した集中系（discrete system）としてのモデル化がよく用いられる。モデル化の例を図 1-4-1、図 1-4-2 に示す。

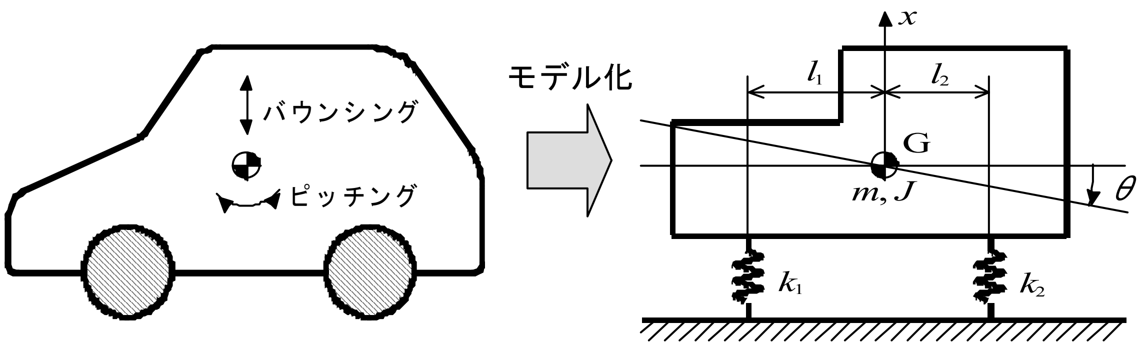

図 1-4-1　モデル化の例１

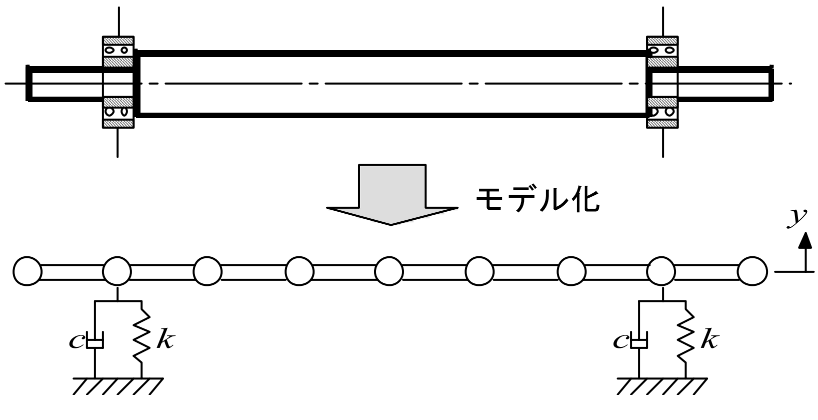

図 1-4-2　モデル化の例２

1-4-2　運動方程式

モデル化の次に、系内に働く力を定性的に知るために運動方程式（equation of motion）が作られる。運動方程式の導出には、ダランベールの原理（d'Alembert's principle）とラグランジュの運動方程式（Lagrange's equation of motion）がよく用いられる。

（１）ダランベールの原理による方法

運動方程式はニュートンの運動法則（Newton's second law of motion）から導かれるが、「加速度運動をしている質量には、見かけ上の静的な力である慣性力（inertia force）が作用していると考えることができる。」というダランベールの原理から導くこともできる。ダランベールの原理に基づいた方法では、物体に作用する静的な力に加えて慣性力を考慮して、静力学的な力のつりあいを考えることで運動方程式が導出される。

［例 1］ばねー質量系

図 1-4-3 に示すように、ばねで天井から吊り下げられた物体の上下運動を考える。ここで、ばねの質量は物体の質量 m に比べて十分に小さく、これを無視できるものとする。また、ばねはフックの法則（Hooke's law）に従い変形するものとし、ばね定数を k とする。いま、自然長 l のばねに物体 m を吊り下げると、ばねは δ だけ伸びて平衡を保つ。

この静的な平衡状態では、重力による下向きの力 mg と、フックの法則に従う上向きの復原力 $k\delta$ が次式のようにつりあっている。

$$mg - k\delta = 0 \tag{1-4-1}$$

この平衡状態になんらかの外乱を加えると、物体は平衡点のまわりで振動をはじめる。ここで、平衡位置からの変位を x（下向きを正）とすると、物体には重力による力 mg とばねの復原力 $k(x+\delta)$ が作用し、加速度 $\ddot{x}$ が生じる。ダランベールの原理によれば、この質量 m には下向きに慣性力 $-m\ddot{x}$ が作用していると考えることができる。静的な力のつりあいは、

$$-m\ddot{x} + mg - k(x+\delta) = 0 \tag{1-4-2}$$

なので、運動方程式は次式のようになる。

$$m\ddot{x} - mg + k(x+\delta) = 0 \tag{1-4-3}$$

さらに、平衡状態の関係式(1-4-1)を考慮することで、運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1-4-4}$$

のように表される。

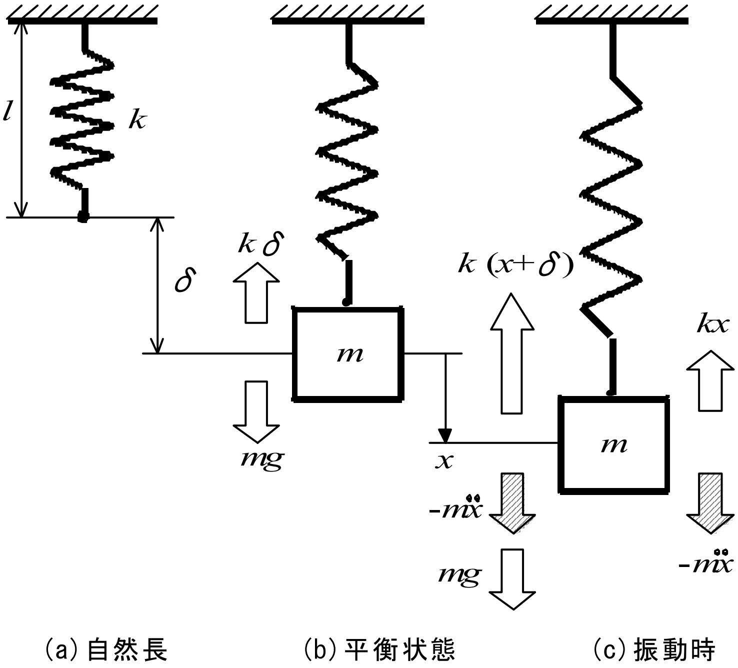

図 1-4-3　ばね－質量系

（２）ラグランジュの運動方程式

ニュートンの運動方程式は、ハミルトンの原理（Hamilton's principle）と呼ばれる変分原理により、ラグランジュの運動方程式という形で表すことができる。複雑で大規模な系では、運動方程式をニュートンの運動法則から直接に導出することは困難な場合が多いので、ラグランジュの運動方程式がよく利用される。

一般化座標（generalized coordinates） $q_r(r=1,2,\cdots,n)$ で表された n 自由度系に対するラグランジュの運動方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_r}=Q_r \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{1-4-5}$$

$$L=T-U \tag{1-4-6}$$

$$\Phi=\frac{1}{2}\sum c_r \dot{q}_r{}^2 \tag{1-4-7}$$

ここで、L はラグランジュ関数(Lagrangian)、T は運動エネルギー(kinetic energy)、U はポテンシャルエネルギー(potential energy)、Φ は散逸関数(dissipation energy)、c_r は粘性減衰係数、Q_r は一般化力（generalized force）を表す。

［例 2］棒の微小回転系（ラグランジュの方法）

図 1-4-4 に示すように、長さ l で質量を無視した棒の一端を回転支持し、他端には質量 m を付ける。質量 m をばね k で支持して棒を微小角度 θ だけ回転させて離すと、棒は微小回転振動を行う。この場合の運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \tag{1-4-8}$$

であり、ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}k\left(l\theta\right)^2 \tag{1-4-9}$$

となり、粘性減衰と外力は考えていないので、式(1-4-8)、(1-4-9)をラグランジュの運動方程式(1-4-5)に代入し、

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \\ &\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kl^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{1-4-10}$$

より、運動方程式は、

$$ml^2\ddot{\theta} + kl^2\theta = 0 \tag{1-4-11}$$

と求まる。

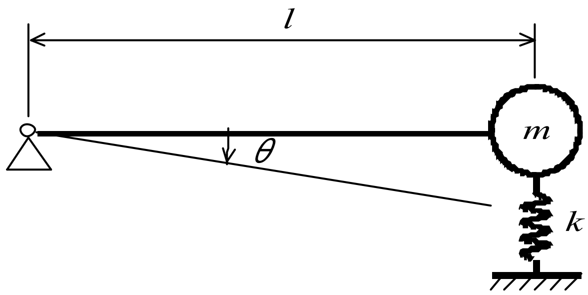

図 1-4-4　付加質量を持ちばね支持された棒の回転系

（３）回転系

回転運動を行う系に対しては、力の代わりにトルク（力のモーメント）のつりあいを考えて、運動方程式を導くことができる。

［例 3］棒の微小回転系（ダランベールの方法）

図 1-4-4 の系を例として運動方程式を求める。図 1-4-5 に示すように、質量 m の変位は移動した円弧の長さ $l\theta$ であり、質量 m に作用する接線方向の力は慣性力 $-ml\ddot{\theta}$ とばねの復原力 $kl\sin\theta$ の接線方向成分 $kl\sin\theta\cos\theta$ なので、トルクのつりあいを考えるこ

とで運動方程式は次のように導かれる。

$$J\ddot{\theta}+kl^2\sin\theta\cos\theta=0 \qquad (1\text{-}4\text{-}12)$$

ここで、Jは回転軸まわりの質量mの慣性モーメント（moment of inertia）であり、

$$J=ml^2 \qquad (1\text{-}4\text{-}13)$$

である。式(1-4-12)は非線形（nonlinear）な方程式であるが、θが微小である場合には、$\sin\theta\cong\theta$、$\cos\theta\cong1$とみなすことができるので、運動方程式は線形化（linearization）することができ、

$$J\ddot{\theta}+kl^2\theta=0 \qquad (1\text{-}4\text{-}14)$$

と表すことができる。

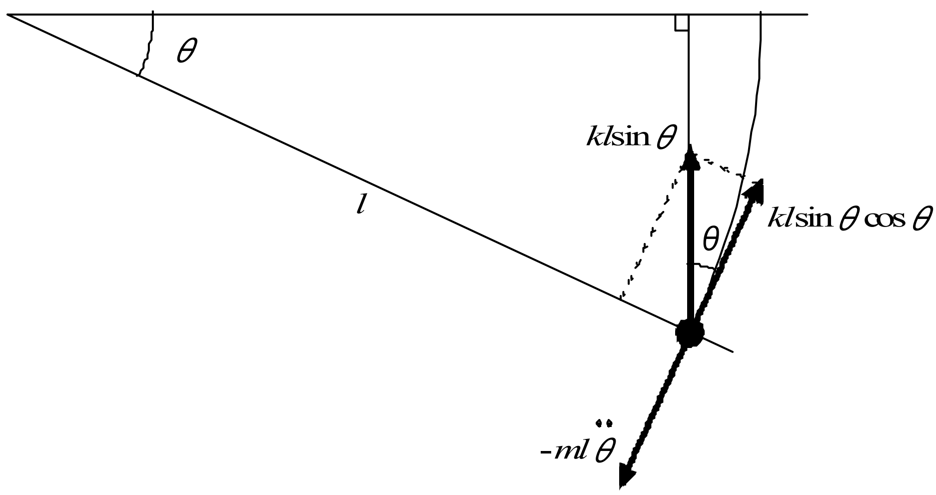

図 1-4-5　付加質量を持ちばね支持された棒の回転系（接線方向の力）

式(1-4-14)において、θをx、Jをm、kl^2をkにそれぞれ置き換えると、直線振動系の式(1-4-4)と同じ形になることがわかる。運動方程式が同じ形であれば、得られる解の形も同様になる。表 1-4-1 に直線振動系と回転振動系における各量の対応関係を示す。

表 1-4-1　直線振動系と回転振動系の対応

質量　$m[kg]$	慣性モーメント　$J[kg\cdot m^2]$
ばね定数　$k[N/m]$	ねじりばね定数　$k_\theta[N\cdot m]$
減衰係数　$c[N\cdot s/m]$	ねじり減衰係数　$c_\theta[N\cdot s\cdot m]$
力　$F[N]$	トルク　$T[N\cdot m]$
変位　$x[m]$	角変位　$\theta[rad]$

1-4-3　等価質量

これまでのモデル化では、ばねや棒の質量は無視できるものとして取り扱ってきたが、実際上では無視できない場合もある。ばねや棒の質量を考慮して分布系としてモデル化することもできるが、ここでは運動エネルギーの等価性に基づき、重心に質量が集中した系に近似する方法を示す。

図 1-4-6 に示すように、質量 m の質点が質量 m_s のばね k に取り付けられて振動するものとする。ばねの平衡長を l、ばねの単位長さあたりの質量を ρ とすると、ばねの全質量は $m_s = \rho l$ と表せる。質点 m の平衡点からの変位を x とし、固定端から ξ の位置における微小部分 $d\xi$ の質量は $\rho d\xi$、速度は $(\xi / l)\dot{x}$ となる。この系の運動エネルギーは、

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^l \frac{1}{2}\rho d\xi \left(\frac{\xi}{l}\dot{x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m + \frac{\rho l}{3}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_s}{3}\right)\dot{x}^2
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}4\text{-}15)
$$

となる。これは質量のないばね k に取り付けた質量 $m + m_s/3$ の質点の運動エネルギーと同等であることがわかる。すなわち、ばねの等価質量（equivalent mass）は $m_s/3$ とみなすことができる。

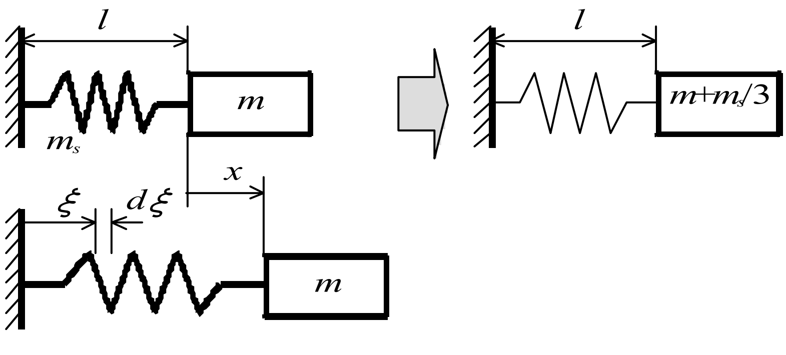

図 1-4-6　等価質量系