第３節　２自由度系

物体の運動を表すのに 2 個の座標を必要とする 2 自由度系の振動は、多自由度系の振動の応答を求めるための基礎となる。代表的な振動系について、振幅比、振動モードを求め、これをもとに応答を求める方法について述べる。

1-3-1　不減衰系の自由振動

図 1-3-1 は、3 個のばね（k_1、k_2、k_3）と 2 個の質量（m_1、m_2）を直列に結合した不減衰系である。各質量は鉛直方向のみ動きうるとすれば、この系の状態は、それら 2 個の質量の変位 x_1 と x_2 で完全に決定できる。

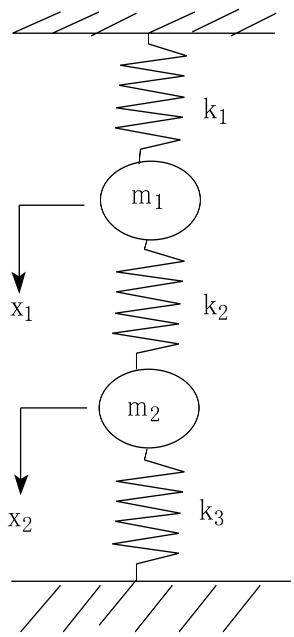


図1-3-1　不減衰の2自由度系

この 2 自由度系の運動方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

上式を m_1 と m_2 で割ると

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right)x_1 + \frac{k_2}{m_1}k_2(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_3}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

となる。この式を整理すると次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1+(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2)x_1-\omega_{12}{}^2x_2=0\\ \ddot{x}_2-\omega_{22}{}^2x_1+(\omega_{22}{}^2+\omega_{23}{}^2)x_2=0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

ここで

$$\omega_{11}{}^2=\frac{k_1}{m_1},\quad \omega_{12}{}^2=\frac{k_2}{m_1},\quad \omega_{22}{}^2=\frac{k_2}{m_2},\quad \omega_{23}{}^2=\frac{k_3}{m_2} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

である。式(1-75)の解 x_1、x_2 を次のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned}x_1=A_1\mathit{sin}\,(\omega t+\phi)\\ x_2=A_2\mathit{sin}\,(\omega t+\phi)\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

式(1-3-5)と式(1-3-5)を時間 t で 2 回微分したものを式(1-3-3)に代入すると

$$\left.\begin{aligned}\left\{-\omega^2A_1+(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2)A_1-\omega_{12}{}^2A_2\right\}\mathit{sin}\,(\omega t+\phi)=0\\ \left\{-\omega^2A_2-\omega_{22}{}^2A_1+(\omega_{22}{}^2+\omega_{23}{}^2)A_2\right\}\mathit{sin}\,(\omega t+\phi)=0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

となる。この式がどのような t に対しても成り立つためには、

$$\left.\begin{aligned}(-\omega^2+\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2)A_1-\omega_{12}{}^2A_2=0\\ -\omega_{22}{}^2A_1+(-\omega^2+\omega_{22}{}^2+\omega_{23}{}^2)A_2=0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

である。式(1-3-7)で A_1 と A_2 が共に 0 とならない解を持つためには、次の関係が必要である。

$$\begin{vmatrix}-\omega^2+\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2 & -\omega_{12}{}^2\\ -\omega_{22}{}^2 & -\omega^2+\omega_{22}{}^2+\omega_{23}{}^2\end{vmatrix}=0 \qquad (1\text{-}3\text{-}8)$$

この行列式を展開すると以下のようになる。

$$\omega^4-(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2+\omega_{23}{}^2)\omega^2+\omega_{11}{}^2\omega_{22}{}^2+\omega_{11}{}^2\omega_{23}{}^2+\omega_{12}{}^2\omega_{23}{}^2=0 \qquad (1\text{-}3\text{-}9)$$

この式を振動方程式という。この式は ω^2 に関する 2 次方程式と考えられ、この解は固有円振動数となるので、その 2 根を $\omega_{n1}{}^2$、$\omega_{n2}{}^2$ ($\omega_{n1}{}^2 < \omega_{n2}{}^2$) とすると

$$\omega_{n1}{}^2,\omega_{n2}{}^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2+\omega_{22}{}^2+\omega_{23}{}^2\right)\mp\sqrt{\left(\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2-\omega_{22}{}^2-\omega_{23}{}^2\right)^2+4\omega_{12}{}^2\omega_{22}{}^2}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$

となる。式(1-3-7)で与えられる解は $\omega=\omega_{n1}$ に対して

$$x_{11}=A_{11}\mathit{sin}\,(\omega_{n1}t+\phi),\quad x_{21}=A_{21}\mathit{sin}\,(\omega_{n1}t+\phi) \qquad (1\text{-}3\text{-}11)$$

また $\omega=\omega_{n2}$ に対して

$$x_{12}=A_{12}\mathit{sin}\,(\omega_{n2}t+\phi),\quad x_{22}=A_{22}\mathit{sin}\,(\omega_{n2}t+\phi) \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

とおくことができる。式(1-3-7)において、$\omega=\omega_{n1}$ のとき $A_1=A_{11}$、$A_2=A_{21}$ また、$\omega=\omega_{n2}$ のとき $A_1=A_{12}$、$A_2=A_{22}$ であるので、振幅比は以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{A_{21}}{A_{11}}&=\frac{-\omega_{n1}^{\ 2}+\omega_{11}^{\ 2}+\omega_{12}^{\ 2}}{\omega_{12}^{\ 2}}=\frac{\omega_{22}^{\ 2}}{-\omega_{n1}^{\ 2}+\omega_{22}^{\ 2}+\omega_{23}^{\ 2}}=\kappa_1\\ \frac{A_{22}}{A_{12}}&=\frac{-\omega_{n2}^{\ 2}+\omega_{11}^{\ 2}+\omega_{12}^{\ 2}}{\omega_{12}^{\ 2}}=\frac{\omega_{22}^{\ 2}}{-\omega_{n2}^{\ 2}+\omega_{22}^{\ 2}+\omega_{23}^{\ 2}}=\kappa_2\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}13)$$

式(1-3-13)に式(1-3-10)の$\omega_{n1}^{\ 2}$、$\omega_{n2}^{\ 2}$を代入すると、振幅比κ_1とκ_2を求めることができる。

すなわち、それぞれの固有角振動数に対する振動様式が存在する。この振動様式を固有モード（natural mode）または振動モード（mode of vibration）という。

1-3-2　不減衰系の強制振動

図1-3-2に示すような2自由度不減衰系に外から加振力を作用させる場合を考える。

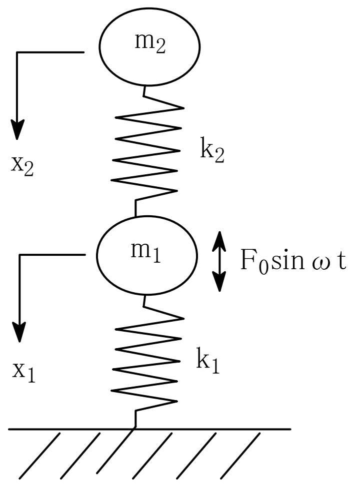


図1-3-2　不減衰系の強制振動

このときの運動方程式は

$$\left.\begin{aligned}&m_1\ddot{x}_1+k_1x_1+k_2(x_1-x_2)-F_0\sin\omega t=0\\&m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}14)$$

となる。両辺をm_1とm_2で割ると

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}_1+\frac{k_1}{m_1}x_1+\frac{k_2}{m_1}(x_1-x_2)-\frac{F_0\sin\omega t}{m_1}=0\\&\ddot{x}_2+\frac{k_2}{m_2}(x_2-x_1)=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}15)$$

となる。この式を整理すると次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}_1+(\omega_{11}^{\ 2}+\omega_{12}^{\ 2})x_1-\omega_{12}^{\ 2}x_2=\frac{F_0\sin\omega t}{m_1}\\&\ddot{x}_2-\omega_{22}^{\ 2}x_1+\omega_{22}^{\ 2}x_2=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}16)$$

ここで

$$\omega_{11}{}^2 = \frac{k_1}{m_1},\quad \omega_{12}{}^2 = \frac{k_2}{m_1},\quad \omega_{22}{}^2 = \frac{k_2}{m_2} \qquad (1\text{-}3\text{-}17)$$

である。この系の強制振動を求める。式(1-3-16)の微分方程式の解を次のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin \omega t \\ x_2 &= A_2 \sin \omega t \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}18)$$

式(1-3-18)と式(1-3-18)を時間 t で 2 回微分したものを式(1-3-16)に代入し、両辺から sinωt の項を除くと

$$\left.\begin{aligned} &\left(-\omega^2 + \omega_{11}{}^2 + \omega_{12}{}^2\right)A_1 - \omega_{12}{}^2 A_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ &-\omega_{22}{}^2 A_1 + \left(-\omega^2 + \omega_{22}{}^2\right)A_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}19)$$

となる。これより、

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\left\{1 - \left(\omega/\omega_{22}\right)^2\right\}X_{st}}{D} \\ A_2 &= \frac{X_{st}}{D} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}20)$$

となる。ここで、

$$\left.\begin{aligned} &D = \left\{1 - \left(\omega/\omega_{11}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\omega/\omega_{22}\right)^2\right\} - a\left(\omega/\omega_{11}\right)^2 \\ &a = \frac{m_2}{m_1},\quad X_{st} = \frac{F_0}{k_1} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}21)$$

である。

1-3-3　減衰系の強制振動

図 1-3-3 に示すような 2 自由度不減衰系に外から加振力を作用させる場合を考える。

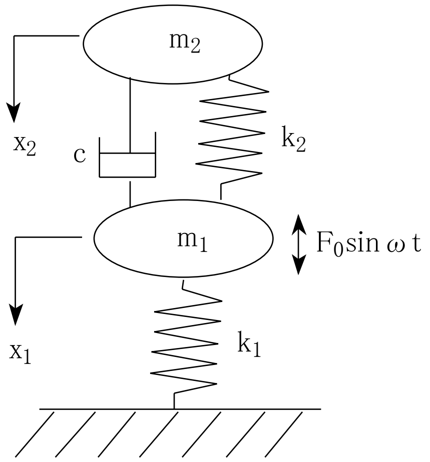


図1-3-3 減衰系の強制振動

この場合の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} & m_1\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) - F_0 \, sin\,\omega t = 0 \\ & m_2\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}22)$$

となる。両辺を m_1 と m_2 で割ると

$$\left.\begin{aligned} & \ddot{x}_1 + \frac{c}{m_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) - \frac{F_0 \, sin\,\omega t}{m_1} = 0 \\ & \ddot{x}_2 + \frac{c}{m_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}23)$$

となる。この式を整理すると次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} & \ddot{x}_1 + 2a\zeta\omega_{22}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (\omega_{11}{}^2 + \omega_{12}{}^2)x_1 - \omega_{12}{}^2 x_2 = \frac{F_0 \, sin\,\omega t}{m_1} \\ & \ddot{x}_2 + 2\zeta\omega_{22}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_{22}{}^2(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}24)$$

ここで

$$\omega_{11}{}^2 = \frac{k_1}{m_1},\quad \omega_{12}{}^2 = \frac{k_2}{m_1},\quad \omega_{22}{}^2 = \frac{k_2}{m_2},\quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{m_2 k_2}},\quad a = \frac{m_2}{m_1} \qquad (1\text{-}3\text{-}25)$$

である。式(1-3-23)の微分方程式の解は自由振動と強制振動の和になるが、自由振動は減衰によって短時間に消滅してしまうので、強制振動のみを考える。式(1-3-23)の解を複素ベクトルを用いて次のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned} & x_1 = A_1 sin\left(\omega t - \phi_1\right) = A_1 e^{j(\omega t - \phi_1)} = A_1 e^{-j\phi_1} e^{j\omega t} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ & x_2 = A_2 sin\left(\omega t - \phi_2\right) = A_2 e^{j(\omega t - \phi_2)} = A_2 e^{-j\phi_2} e^{j\omega t} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}26)$$

これらを式(1-3-23)に代入し、両辺より $e^{j\omega t}$ を除くと

$$\left.\begin{aligned}&\left(-\omega^2+\omega_{11}{}^2+\omega_{12}{}^2\right)\tilde{A}_1-\omega_{12}{}^2\tilde{A}_2+2ja\zeta\omega_{22}\omega\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)=\frac{F_0}{m_1}\\&-\omega_{22}{}^2\tilde{A}_1+\left(-\omega^2+\omega_{22}{}^2\right)\tilde{A}_2+2j\zeta\omega_{22}\omega\left(\tilde{A}_2-\tilde{A}_1\right)=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}27)$$

となる。$\tilde{A}_1$と$\tilde{A}_2$を求めると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\tilde{A}_1&=\frac{\left\{1-\left(\omega/\omega_{22}\right)^2+2j\zeta\left(\omega/\omega_{22}\right)\right\}X_{st}}{D}\\\tilde{A}_2&=\frac{\left\{1+2j\zeta\left(\omega/\omega_{22}\right)\right\}X_{st}}{D}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}28)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}&D=\left\{1-\left(\omega/\omega_{11}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\omega/\omega_{22}\right)^2\right\}-a\left(\omega/\omega_{11}\right)^2+2j\zeta\left(\omega/\omega_{22}\right)\left\{1-(1+a)\left(\omega/\omega_{11}\right)^2\right\}\\&X_{st}=\frac{F_0}{k_1}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}29)$$

したがって、X_{st}に対するA_1とA_2の振幅倍率は

$$\frac{A_1}{X_{st}}=\frac{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}^2}}{\sqrt{\left[\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}^2\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}^2-a\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2+\left[\left\{2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}\left\{1-(1+a)\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\right]^2}}\qquad(1\text{-}3\text{-}30)$$

$$\frac{A_2}{X_{st}}=\frac{\sqrt{1+\left\{2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}^2}}{\sqrt{\left[\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}^2\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}^2-a\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]^2+\left[\left\{2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}\left\{1-(1+a)\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\right]^2}}\qquad(1\text{-}3\text{-}31)$$

となる。位相角は

$$\tan\phi_1=\frac{2\zeta a\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^3}{\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}\left[\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}-a\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right]+\left\{2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}^2\left\{1-(1+a)\left(\dfrac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}}$$

(1-3-32)

$$\tan\phi_2 = \frac{2\zeta\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^3}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2\right\}-a\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)^2+\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_{22}}\right)\right\}^2\left\{1-(1+a)\left(\frac{\omega}{\omega_{11}}\right)^2\right\}}$$

(1-3-33)

となる。

［例題１］

振幅２[mm]､振動数が５[Hz]で振動する物体の最大速度と最大加速度を求めなさい。

（解答）

振動の変位を表す式は　$x=A\cos\omega t$ で表される。ここでＡは振幅、ωは角速度であるが円振動数（角振動数）である。円振動数(ω)、周期(T)、振動数(f)には次の関係が成り立つ。

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

速度(v)と加速度(a)は

$$v=\frac{d}{dt}A\cos\omega t=-A\omega\sin(t\omega) \qquad a=\frac{d}{dt}(-A\omega\sin(t\omega))=-A\omega^2\cos(t\omega)$$

となる。

最大の速度は $A\omega=2\times2\pi\times5=62.8$ [mm/s]

最大の加速度は

$$A\omega^2=2\times(2\pi\times5)^2=1970 \text{ [mm/s}^2\text{]}$$

［例題２］

$x=10\sin(\pi t/6+\pi/3)$ の調和振動において、t=3[s]での変位(x)、速度(v)、加速度(a)を求めなさい。ただし、振幅の単位は[cm]とする。

（解答）

$$x=10\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=5 \text{ [cm]}$$

$$v=\frac{d}{dt}10\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=10\times\frac{1}{6}\pi\cos\left(\frac{1}{6}t\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-4.54 \text{ [cm/s]}$$

$$a=\frac{d}{dt}10\times\frac{1}{6}\pi\cos\left(\frac{1}{6}t\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{10}{36}\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}t\pi\right)=-1.37 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

［例題３］

$x_1=5\sin\omega t$　と　$x_2=10\cos(\omega t+\pi/3)$の合成振動を求めなさい。

（解答）

２つの調和振動　$x_1=A_1\cos\left(\omega_1 t+\phi_1\right)$　と　$x_2=A_2\cos\left(\omega_2 t+\phi_2\right)$
を合成すると次のように表される。

$$x=A\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}+\phi\right)$$

ただし、

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left\{\left(\omega_1-\omega_2\right)t+\phi_1-\phi_2\right\}}$$

$$\tan\phi=\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}\tan\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

である。

$$5\sin\omega t+10\cos(\omega t+\frac{\pi}{3})=5\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})+10\cos(\omega t+\frac{\pi}{3})$$

$$=A\cos\left(\frac{\omega+\omega}{2}t+\frac{-\pi/2+\pi/3}{2}+\phi\right)$$

$$A=\sqrt{5^2+10^2+2\times5\times10\cos\{(0-0)t-\pi/2-\pi/3\}}=6.2$$

$$\tan\phi=\frac{5-10}{5+10}\tan\left(\frac{\omega-\omega}{2}t+\frac{-\pi/2-\pi/3}{2}\right)=-\frac{5}{15}\tan\left(-\frac{5}{12}\pi\right)=1.24$$

$$\phi=\tan^{-1}(1.24)=0.892$$

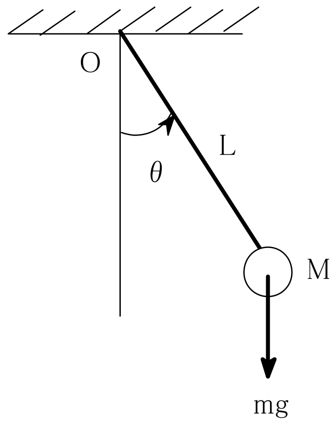
求める合成式は以下のようになる。

$$6.2\cos\left(\frac{\omega+\omega}{2}t+\frac{-\pi/2+\pi/3}{2}+0.892\right)=6.2\cos\left(t\omega-\frac{1}{12}\pi+0.892\right)$$

$$=6.2\cos(\omega t+0.63)$$

［例題４］

下図に示す単振子の固有円振動数を求めなさい。



（解答）

糸が鉛直線に対してθの角度だけ傾いた場合を考える。物体に働く重力 Mg を、糸の方向とこれに垂直な方向の成分に分解する。糸に垂直な成分 Mgsinθは支点０のまわりにθが増加する向きとは逆のモーメント MgLsinθを与える。振子の角加速度をαとすると回転運動の運動方程式は

$$ML^2\alpha + MgL\,sin\,\theta = 0$$

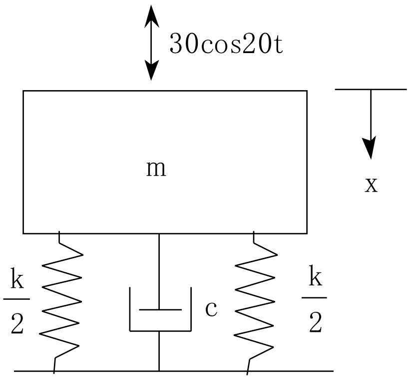
となる。振れ角のθが小さいときは、$\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$となるので

$$ML^2\ddot{\theta} + MgL\theta = 0$$

上式を整理すると $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$ となるので、これより固有円振動数は $\sqrt{\dfrac{g}{L}}$ となる。

［例題５］

下図に示すように質量 m=50[kg]の機械が、全ばね定数 k=15×10^3 [N/m]、減衰係数 c=200[Ns/m]で据え付けられている。質量には 30cos20t [N]の加振力が作用する。この系の初期条件として初期位置 x0=20 [mm]、初期速度 v0=250 [mm/s]で動き始める場合の振動運動 x(t)を求めなさい。



（解答）

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F\,cos\,\omega t$　　(1)　の運動方程式は、定数係数を持つ2階の非同次常微分方程式である。このような方程式の一般解は同次方程式の一般解(x_c)＋特殊解(x_p)で表される。

（１）同次方程式の一般解(x_c)

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$　　(2)　のような同次方程式の解は

$$x=e^{-\zeta\omega_n t}sin\left(C_1 cos\,\omega_d t+C_2 sin\,\omega_d t\right) \quad (3)$$

または

$$x=Ce^{-\zeta\omega_n t}sin\left(C_1 cos\,\omega_d t+\phi\right) \quad (4)$$

となる。ここで、

$$\frac{k}{m}=\omega_n{}^2,\quad \frac{c}{m}=2\zeta\omega_n \quad (5)$$

$$c_c=2\sqrt{km} \quad (6)$$

$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}}=\frac{c}{c_c} \quad (7)$$

$$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \quad (8)$$

である。

ω_nは（不減衰）固有角振動数、ω_dは減衰固有角振動数、ζは減衰比、c_cは臨界減衰係数である。

（２）特殊解(x_p)

$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F\,cos\,\omega t$　　(1)の運動方程式は、次のように仮定し、未定係数法によりD_1、D_2を決定する。

$$x=D_1\,sin\,\omega t+D_2\,cos\,\omega t \quad (9)$$

この場合

$$D_1=\frac{cF\omega}{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2},\quad D_2=\frac{F\left(k-m\omega^2\right)}{\left(k-m\omega^2\right)^2+(c\omega)^2} \tag{10}$$

である。よって、式(9)より

$$x=\frac{F}{\sqrt{\left(k-m^2\right)^2+(c\omega)^2}}\left\{c\omega\, sin\,\omega t+\left(k-m\omega^2\right)cos\,\omega t\right\}=\frac{F}{\sqrt{\left(k-m^2\right)^2+(c\omega)^2}}\,sin\,(\omega t+\phi) \tag{11}$$

ここで、

$$\phi=tan^{-1}\left(\frac{k-m\omega^2}{c\omega}\right) \tag{12}$$

である。

この問題の場合

$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}}=\frac{200}{2\sqrt{15\times10^3\times50}}=0.115$$

$$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n=\sqrt{1-0.115^2}\times17.3=17.2$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{15\times10^3}{50}}=17.3$$

であるので、同次方程式の一般解は

$x_c=Ce^{-0.115\times17.3t}\sin(17.2t+\phi)=Ce^{-1.99t}\sin(17.2t+\phi)$となる。

特殊解は

$$x_p=\frac{F}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\phi)$$

$$=\frac{30}{\sqrt{(15\times10^3-50\times20^2)^2+(200\times20)^2}}\sin(20t-\phi)$$

$$=0.00469(20t+0.896)$$

となる。

ここで、

$\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{k-m\omega^2}{c\omega}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{15\times10^3-50\times20^2}{200\times20}\right)=-0.896$である。

求める一般解は

$x=Ce^{-1.99t}\sin(17.2t+\phi)+0.00469(20t+0.896)$ (13)

となり、これを微分したものは

$x'=-1.99Ce^{-1.99t}\sin(17.2t+\phi)+17.2C^{-1.99t}\cos(17.2t+\phi)$
$+0.00469\times20\cos(20t+0.896)$ (14)

となる。これらと題意 $x(0)=20$ [mm]、$x'(0)=250$ [mm/s]より

$x=26.25e^{-1.99t}\sin(17.2t+0.869)+0.00469\sin(20t+0.896)$ となる。

［問題１］

$r_1=10e^{j(\omega t+\pi/4)}$, $r_2=5e^{j(\omega t+\pi/6)}$で表される複素ベクトルを合成しなさい。

(解)$r=14.9e^{j(\omega t+0.698)}$

［問題２］

質量が 50 [kg]、ばね定数が 100 [N/m]、減衰係数が 20 [Ns/m]とするときの減衰比を求めなさい。

（解） $\zeta=0.141$

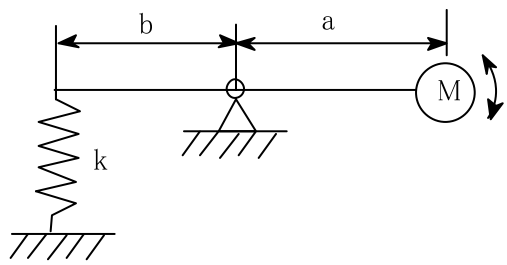
［問題３］

ばねの自由端に取り付けられた物体の固有振動数が 5 [Hz]であった。これに 5[kg]の質量を追加したところ振動数が 2 [Hz]になった。ばね定数と最初の質量を求めなさい。

(解)質量=1.125 [kg]、ばね定数＝1110 [N/m]

［問題４］

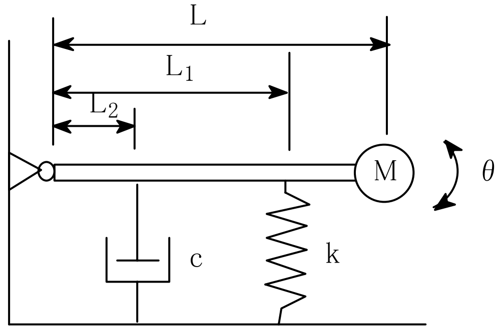
下図に示す軽い剛体棒の一端に質量 M、他端にばね定数 k を有する振動系の固有振動数を求めなさい。



（解） $\omega_n=\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

［問題５］

下図に示すように剛体棒の一端がピボットされ、他端に質量Ｍ、途中にばね定数ｋのばねとダンパｃが取り付けられている系がある。この系の減衰固有円振動数を求めなさい。



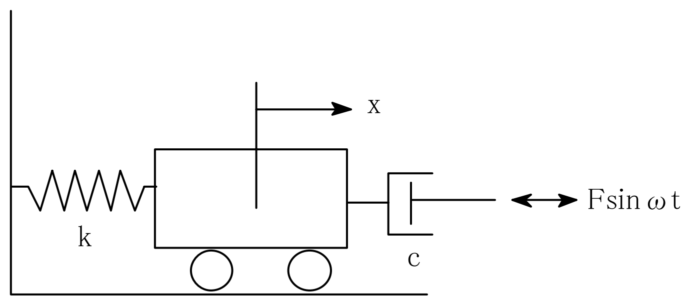
（解）

減衰固有円振動数は

$$\omega_n = \frac{M}{L}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

［問題６］

下図に示す振動系の先端に Fsinωｔ の強制振動を与えた場合の強制振動の振幅を求めなさい。



（解）

強制振動の振幅は

$$X = \frac{2\zeta\left(\omega/\omega_n\right)F}{\sqrt{\left\{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\left(\omega/\omega_n\right)\right\}^2}}$$