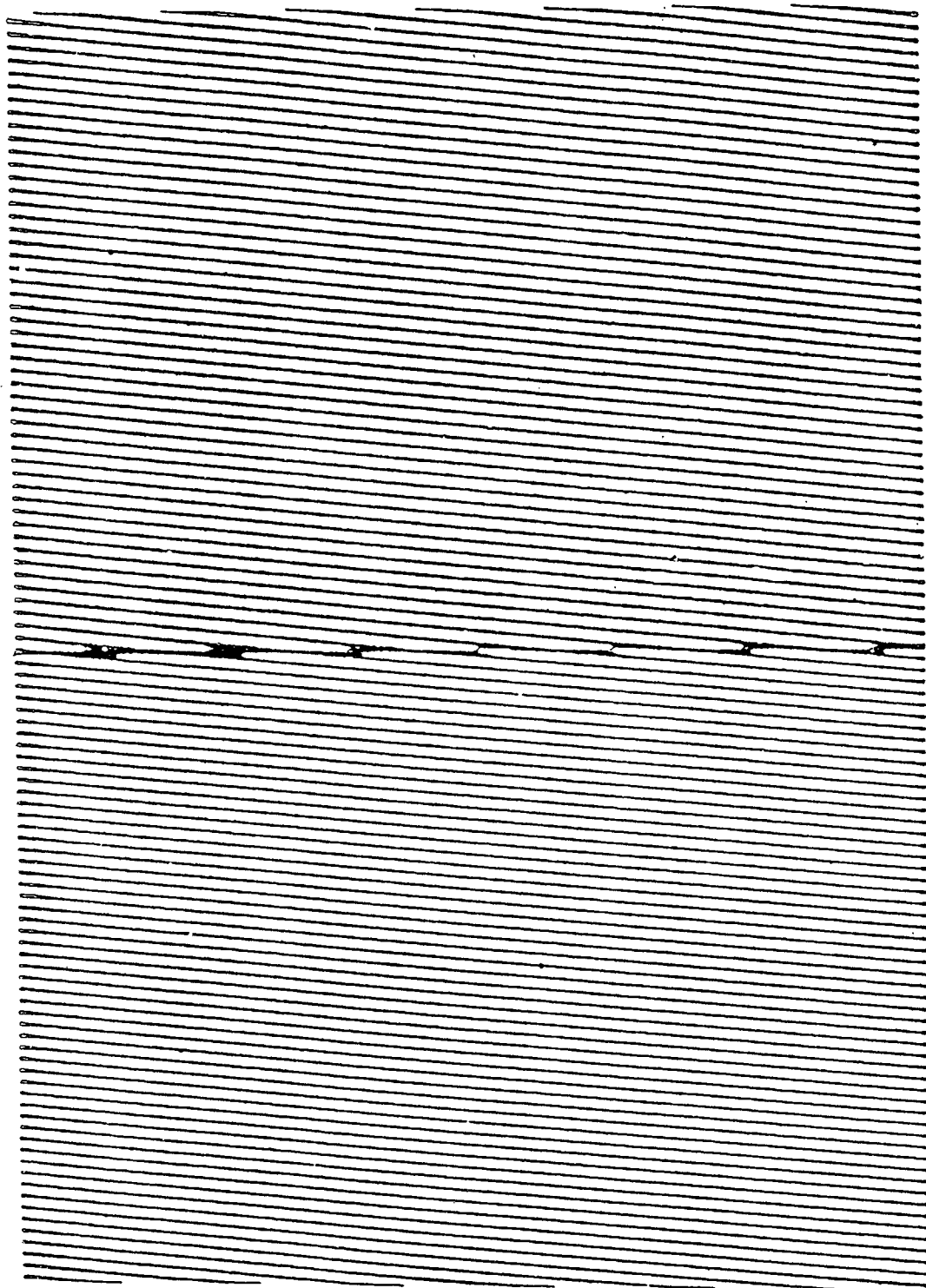


## 文 献

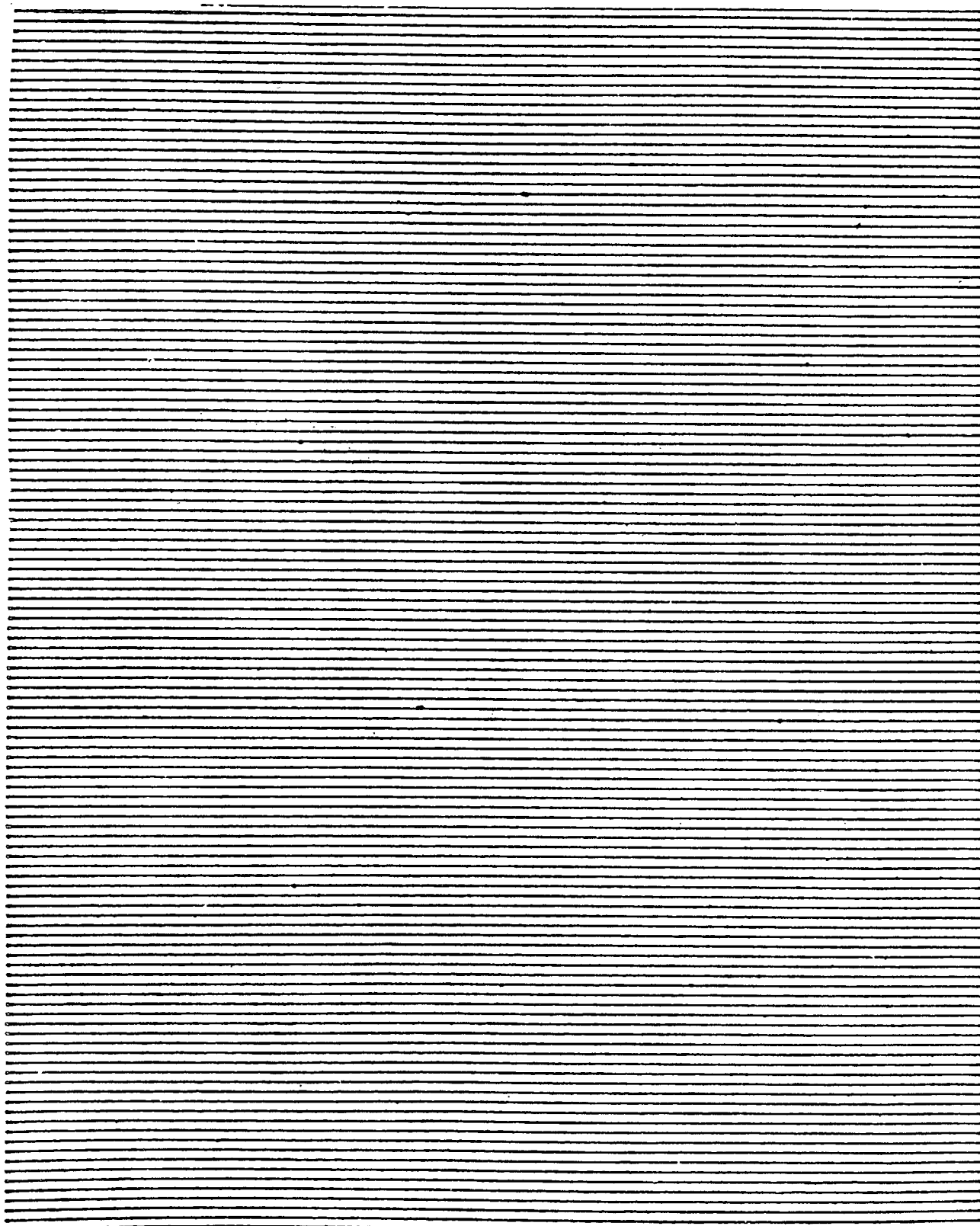
- 1) 電気学会編：新しい時代への教育工学，電気学会，昭47
  - 2) 末武国弘：教育機器活用の実際と展望，学習研究社，1977
  - 3) 清水他：OHP提示における指示棒の効果，日本教育工学会，6，  
1，pp.11-18,1981  
(以下，モアレに関する文献)
  - 4) 松林勉：モアレ縞の波動への応用II，物理教育，27、1，pp、39  
-45,1979
  - 5) 松林勉：モアレ縞による円形波，物理教育，30、1，pp、25-29，  
1982
  - 6) Oster,etal,:Theoretical Interpretation of Moire Patterns,J.O.  
S.A.54.2,pp.169-175,1964
  - 7) Guild,J.:The Interference Systems of Crossed Diffractings,O  
xford Univ.Press,London,1956
  - 8) Drewery,J.O.:The Zone Plate as a Television Test Pattern,S  
MPTE J.,88,pp.763-770,1979
  - 9) 吉田他：固体撮影素子の画像とモアレ，信学技報，IE80-96,1980
  - 10) 北垣郁雄：モアレ・反転モアレによる同心円状進行波・微粒子群の  
演示のための簡易OHP教具とその評価，信学論，J68-A,1,pp.1-  
8,1985
  - 11) Kitagaki,I:Simple OHP Equipment for Demonstrating centrif  
ugal Spherical Waves and Group of Minute Articles by Using  
Moire and Reversal Moire and Their Evaluation,Scripta Technic  
a,68,12,pp.17-26 1985
  - 12) 北垣郁雄：モアレを利用した物理系簡易OHP教具の開発，信学論，  
J69-A,3,pp.334-340,1986
  - 13) Kitagaki,I:Development of Several OHP Equipments of Physi  
cs Using Moire Patterns,Scripta Technica,70,8,pp.1-10,1987
- 文献10)～13)は資料1～4として巻末に添付

モアレ用のトラペン

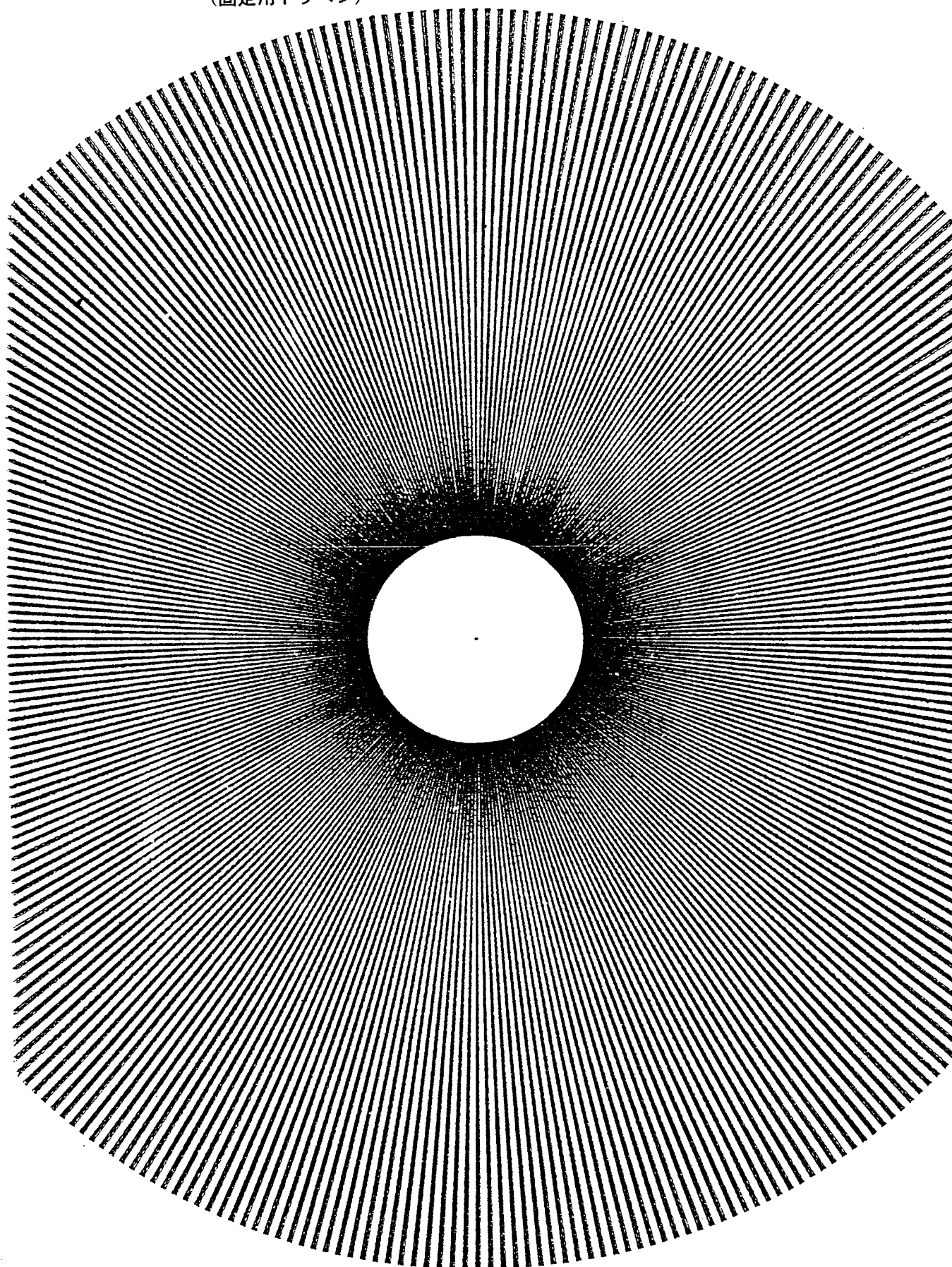
モアレ～光の屈折～  
(固定用トラペン)



モアレ～光の屈折～  
(移動用トラペン)

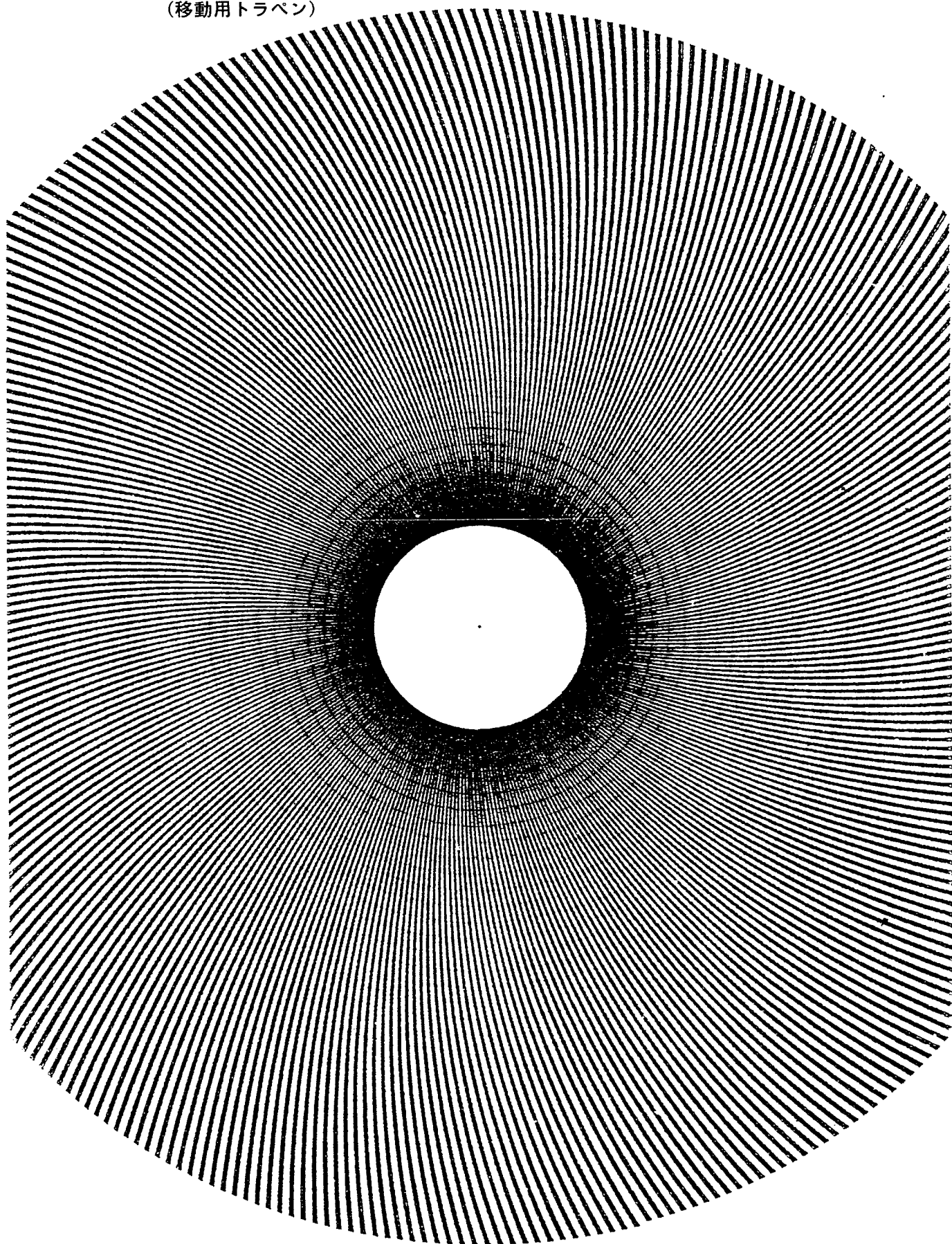


モアレ～円形波～  
(固定用トラペン)



モアレ～円形波～

(移動用トラベン)



資料 1 ～ 4

## 各種モアレ用トラペンの 制作法と原理

# モアレ・反転モアレによる同心円状進行波・ 微粒子群の演示のための簡易 OHP 教具とその評価

正 員 北垣 郁雄<sup>†</sup>

Simple OHP Equipments for the Demonstration of  
Centrifugal Spherical Waves / a Group of Minute Article  
Using Moiré / Reversal Moiré and the Evaluation

Ikuro KITAGAKI<sup>†</sup>, Member

あらまし 電磁気などの物理系教育を補助するものとして、同心円状進行波や放射状に進行する微粒子群のモデルなどを演示する簡易 OHP 教具を報告する。モアレによる波動は、所定の 2 枚の格子縞のマンセンを用い、一方を固定し他方を並進移動させて発生することができるが、本研究ではその操作性の容易さから回転式を用い、その場合の格子縞パターンを伝搬速度の関数として求める。一方微粒子群のモデルは、主にベクトル解析での“発散”の概念の指導に供するものとして開発するが、モアレと裏腹の技法ともいえる反転モアレを用いる。本論文では、これらのモデル演示に必要なマンセンの設計法をのべる。また、2 枚の同一の放射状マンセンを、中心を多少ずらして重ね合わせると、ダイボールの電気力線に類した模様になるが、このパターンが、互いに平行でそれぞれ正負にかつ等密度に帯電した線電荷が呈する field に一致することを証明する。さらに、これらの教具に関するイメージ調査を行い、その因子分析の結果から、「アイディア」を表す因子軸に関して比較的高得点であることなどをのべる。

## 1. ま え が き

モアレは、細かな 2 種類の格子縞を重ね合わせることで生ずる。格子縞のわずかな変化に対しても、モアレパターンが大きく変わるので、回折格子<sup>(1)</sup>、生体情報の計測<sup>(2)</sup>、レーザによる変位測定<sup>(3)</sup>などの高精度の測量技術に利用される。特に最近ではテレビ<sup>(4)</sup>、CCD の画像解析<sup>(5)</sup>、ファクシミリ<sup>(6)</sup>の品質改良などでも、モアレの問題に帰着することがあり、その工学的用途は広い。さらに、造形の分野でも興味の対象となることがある。

一方、これらの応用と並行して、理工系の物理教育に供するための、波動演示用モアレパターンも研究されている。つまりモアレ教具は、可視化が困難な波動をダイナミックにしかも比較的簡単に演示でき、また学習者の造形面での興味をそそることが多いので、学習意欲を高める有効な教育メディアとされているわけ

である。たとえば、平面波の屈折、疎密波、同心円状進行波<sup>(7)</sup>など、いずれも所定の 2 枚のマンセンを用い、一方を固定し、他方を重畳したのち並進移動させて OHP 演示を行う（それぞれのマンセンを固定マンセン、重畳マンセンと呼ぶことにする）。

さて本研究では、主に電磁気学を対象として、同心円状進行波と放射状に進行する微粒子群を演示するマンセンの設計を行う。

まず同心円状進行波は、操作性を考慮して重畳マンセンを回転させて演示するようにし、その格子縞のパターンを伝搬速度の関数として導出している。特に、回転式を用いると、2 マンセンの中心点をピンなどで半固定しておけば操作中にマンセンがずれるといった心配がなく、また電動による連続演示が容易という特長もある。

次に微粒子群は、主にベクトル解析での流体モデルを模倣しようとするもので、モアレの裏腹の技法ともいえる反転モアレ<sup>(8)</sup>を用いて演示する。そこでは、微粒子群の速度のほか、微粒子の形状などを規定する諸パラメータも加えてマンセンの設計を行っている。

<sup>†</sup> 福岡教育大学教育工学センター、宗像市  
Center for Educational Technology, Fukuoka University of  
Education, Munakata-shi, 811-41 Japan



一方静的演示ではあるが、同一の放射状マンセンを重ねた場合のパターンについて論ずる。すなわち、そのモアレパターンが、互いに平行でそれぞれ正、負に帯電した線電荷が呈する電気力線の様子に一致することを導出する。

本論文では、このような簡易OHP教具をとりあげているが、ここに「簡易」とは、操作性と経済性の2つを指している。いずれも、教育現場での教育機器の普及に必要な要件であり、本研究でもこの点を加味して教具の開発を行っている。尚、ごく限られた物理現象の演示教具ではあるが、同心円状進行波はそのまま高校以下の音波の教具としても利用でき、一方ベクトル解析も流体力学全般に共通する重要科目であるので、それなりに一般性のあるものと思われる。

## 2. 同心円状進行波のモデル

シミュレーション教材は、(1)実際の物理現象の演示、(2)モデルの設定の2通りの目的が考えられる。本章でのモアレは主に(2)に着目して、基本的なモデルの開発を行う。すなわち、同心円状進行波が均一媒質中又は同心円状に伝搬定数に変化する媒質中を伝搬する場合を取り扱い、またその伝搬速度は比較的簡単な関数で初期設定する。

次に、この波動を回転操作によって演示するので、固定マンセン上の線群（固定線、fixed lines）と重畳マンセン上の線群（重畳線、overlapped lines）を重ねたときのパターンは回転方向に依存してはならない。換言すれば、両線群共、中心から放射状に伸びかつピッチが等しいように描けばよい。そして、モアレは2線群の相対的位置関係によってのみ定まるので、固定線は簡単に直線状としておく。両マンセンを重ねると、線群間のすべての交点は図1の例のように重畳マンセンの回転と共に移動し、これが周辺に伝搬する円形波を演示する。次に、重畳線を極座標 $(r, \theta)$ で表し、伝搬速度 $v$ を次式で初期設定する。

$$v \propto r^n \quad (1)$$

一方、図1から明らかなように、

$$v = dr/d\theta \quad (2)$$

が成り立つ。尚、 $\theta$ は重畳マンセン自体の回転量と考えてもよい。 $r(\theta)$ を求める際、境界条件は $\theta = \theta_0$ のとき $r = r_0$ 、 $\theta = \theta_1 (> \theta_0)$ のとき $r = r_1$ とする（便宜上、 $r_0$ 、 $r_1$ は描いた重畳線の両端としておく）。また、 $r_1 > r_0$ としても一般性を失わない。式(1)、(2)より、次の解が得られる。

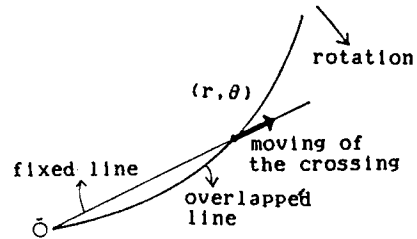


図1 交点の移動  
Fig. 1 Moving of a crossing.

$n \neq 1$  のとき

$$r = (A\theta + B)^{\frac{1}{-n+1}} \quad (3)$$

ここに

$$A = \frac{r_1^{-n+1} - r_0^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0}, \quad B = \frac{\theta_1 r_0^{-n+1} - \theta_0 r_1^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0} \quad (4)$$

$n = 1$  のとき

$$r = C \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{\theta}{\theta_1 - \theta_0}} \quad (5)$$

ここに

$$C = r_0^{\frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_0}} \cdot \frac{1}{r_1^{\frac{\theta_0}{\theta_1 - \theta_0}}} \quad (6)$$

尚、 $\theta_1 - \theta_0 (\equiv \theta_D)$ は、一波面を回転操作によって $r_0$ から $r_1$ へ移動させるのに必要な角度（以後、 $\theta_D$ を操作角（angle of operation）と呼ぶ）である。 $\theta_D$ は、小さすぎるとわずかな回転によって波面が大きく移動するので見にくい演示になり、逆に大きすぎると手によるスムーズな操作が難しくなる。簡単な実験で、 $n = -1 \sim 1$ の範囲では、 $\theta_D$ は $\pi/16 \sim 2\pi/3$ 程度（操作角範囲と呼ぶ）がよいようである。

次に、線間のピッチと各線の太さは、各々 $s$  [rad]と $s_w$  [rad]で角度表示する。波動を表す濃淡の模様になるべく $r$ に依存しないように、線の太さを $r$ に比例させるわけである。そして、 $s$ と $s_w$ は次のように定める。

$s$ は、この値が小さすぎると、中心近くで隣接する線同士が重なり、逆に大きすぎても、モアレそのものの現象が消滅してしまう。 $s_w$ についてもほぼ同様のことがいえる。このような観点から、 $s$ は $\pi/160$ 、また $s_w$ は $0.4$  sと定めた。

マンセンの制作例を、図2に示す。(a)は $n = 0$ に対する重畳線であり、これを(b)の固定線に重ねた結果を(c)に示す。 $n = 0$ であるので、波長が一定であることなどが同図から読みとれる。そして、(a)の重畳マンセ

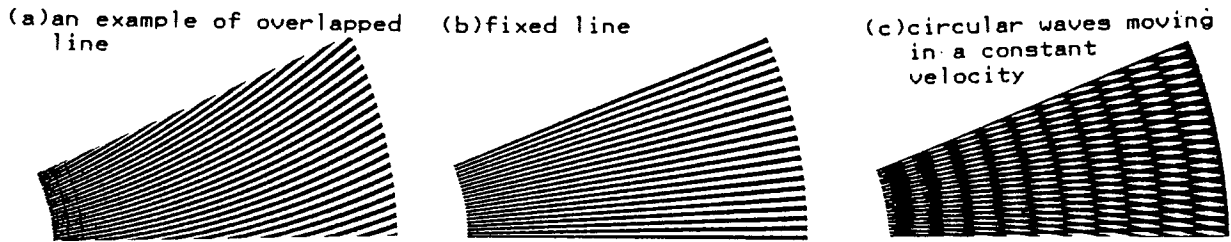


図2 モアレによる同心円状進行波の演示  
Fig. 2 Presentation of circular waves by moiré.

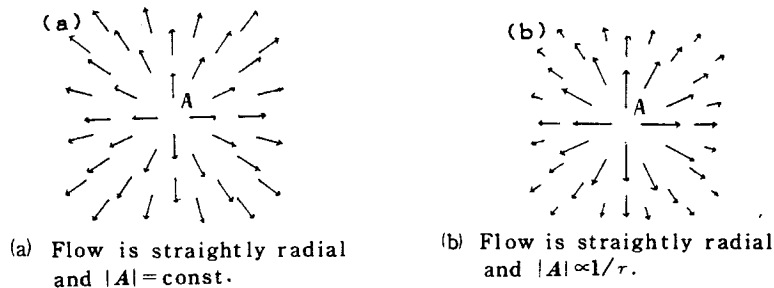


図3 “発散”のモデル  
Fig. 3 Model for “divergence”.

ンを時計方向に回転すると、円形の波面が、遠心的に進行するのが、観測される。

### 3. 反転モアレを用いた放射状進行微粒子群のモデル

反転モアレ用マンセンは、極細のペンで所定の線群を描いたあと、反転（つまり、線群の部分のみを透明にする）して制作する。したがって、マンセンを重ねると2つの線が交叉した部分が光を透過し、これが一つの微粒子（a minute article）を表現する。

#### 3.1 ベクトル解析での流体の場合

図3は、パークレイ<sup>(9)</sup>に準じた“発散”に関連の深いモデルである。(a),(b)はいずれもその基本的なモデルと考えてよい。パークレイの流体モデルでベクトル解析の設定を行うと誤答が多く<sup>(10)</sup>、これは、誤った概念をなくすための重要な例題の1つと考えることができる。

まず、ベクトル空間  $A$  での  $\text{div } A$  は、円筒座標  $(r, \theta, z)$  では次式となる。

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (7)$$

図3の場合は、 $\partial/\partial\theta = \partial/\partial z = 0$  として、第1項だけとなり、

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} \quad (8)$$

となる。

そして、図3(a)は  $a_r = \text{const.}$ 、図3(b)は  $a_r \propto 1/r$  のモデルである。したがって、式(1),(2)で  $v = a_r$  と考えれば、 $n=0, -1$  としたときの解が、それぞれ図3(a),(b)に対応する。

逆に、 $\text{div } A$  から流体モデルを類推するという学習指導の場合は、式(8)で  $\text{div } A = 0$  又は  $\text{const.} (\neq 0)$  という簡単な設定を行うことが多く、それぞれ  $a_r \propto 1/r$ 、 $a_r \propto r$  のモデルになる。

以上の考察から、基本モデルに関する教材としては、 $n=-1, 0, 1$  の3種類でほぼ充分と思われる。但し、本研究では先のパークレイのモデルを中心にのべる。

さて、重畳線の型は先の同心円状進行波と同様で、式(3)又は式(5)を用いればよい。一方、固定線の方角は微粒子群の進行方向に一致するので、直線放射状にする。またここでは、微粒子群を市松模様に表示するため、固定線のピッチ  $s_f$  は重畳線のピッチ  $s_f$  の1/2とした。

以下、線の描写に必要なパラメータを規定するが、 $n=0$  の例で示すことにする。

〔線の太さ  $t$ ,  $t_f$ 〕 固定線  $r_f(\theta)$  の太さ  $t_f$  と重畳線  $r(\theta)$  の太さ  $t$  は、それぞれ  $r$  に関して一定とし、次のように定める。

まず、図4(a),(b)はそれぞれ、 $t \gg t_f$ ,  $t \ll t_f$  なる場合の微粒子の形（太線）を拡大して示したものである。このとき、重畳マンセンを時計方向に回転すると微粒子は太線矢印の方向に移動するが、(b)の場合は、

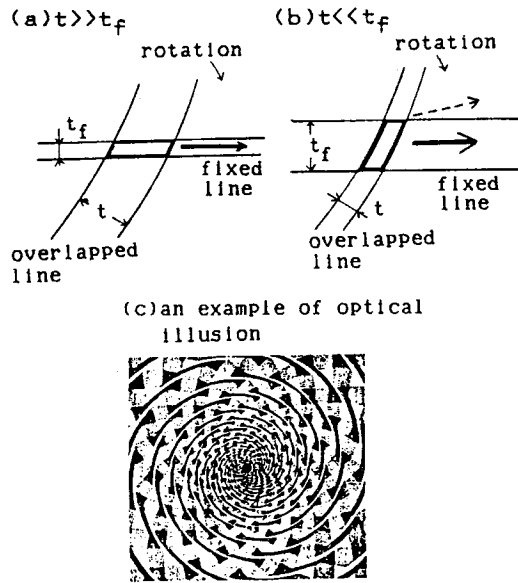


図4 微粒子の形状と錯視(図(c)は11)の転写である)  
Fig. 4 Shape of a minute article and its optical illusion.

OHP上で演示するとその形状の性質からやや右上の方向(破線矢印)に移動するように見えるという錯視(optical illusion)が発生する(これは、図4(c)で、ラセンのように見える各線が、実は皆、同心円であるという錯視<sup>11)</sup>に類似した現象と見ることもできる)。そこで、それを防ぐために  $t > t_f$  なる条件を設けた。しかし  $t > t_f$  では、交叉面積が小さすぎて微粒子そのものが不明瞭になることがある。このような考察から、 $t = 0.3 \text{ mm}$ ,  $t_f = 0.18 \text{ mm}$  と定めた。

〔隣接線間距離  $\tau$ 〕 図5(a)で、太線の隣接線間の距離(distance of neighboring lines)を  $\tau(\theta)$ 、また  $r(\theta)$  の接線座標形式を  $r(\xi)$  とする。それぞれのマンセン内で隣接する線が重ならないためには、次式の条件が必要である。

$$\text{重畳線: } t < \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \tau(\theta)$$

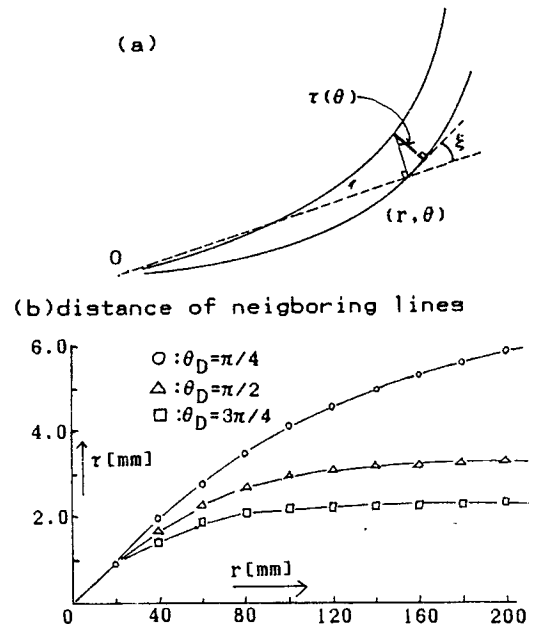
$$\text{ここに、} \tau(\theta) = |r(\theta) \sin \xi| \quad (9)$$

$$\text{固定線: } t_f < \min_{r_0 \leq r \leq r_1} r \cdot s / 2 = r_0 s / 2 \quad (10)$$

また図5(b)は、式(9)の  $\tau$  の計算例である。図中、 $\theta_D$  は操作角を示す。尚、式(9)は  $n$  の値にかかわらず、次式で代用できることが解析的に明らかになっている。

$$t < \min(\tau(\theta_0), \tau(\theta_1)) \quad (11)$$

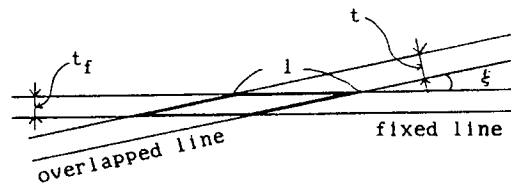
〔微粒子らしさ  $\rho$ 〕 固定線と重畳線が交叉する点の付近で、その傾きが類似しすぎると、線の太さが無視できなくなり、微粒子が図6(a)のように細長い平行四辺形になってしまう。そこで、その底辺と高



The line pitch is  $\pi/60$

図5 隣接線間距離  $\tau(\theta)$   
Fig. 5 Distance of neighboring lines  $\tau(\theta)$ .

(a) shape of a minute article



(b) likelihood of a minute article

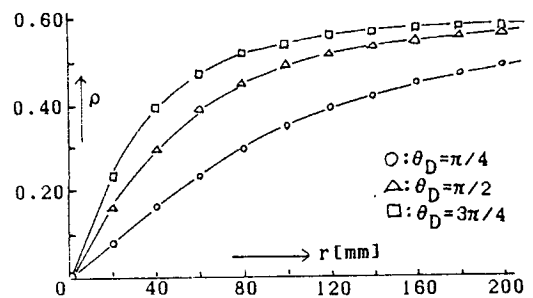


図6 微粒子の形状と微粒子らしさ  $\rho$  ( $\theta_D$ : 操作角)  
Fig. 6 Shape of a minute article and likelihood of a minute article ( $\theta_D$ : angle of operation).

さを用いて微粒子らしさ  $\rho$  (likelihood of a minute article) を定義する。

$$\rho = t_f / l = t_f |\sin \xi| / l \quad (12)$$

尚、 $t > t_f$  であるので  $\rho < 1$  である。そして式(13)の公式を用いると  $\rho$  は式(14)となる。

$$\tan \xi = r / (dr/d\theta) \quad (13)$$

$$\rho = \frac{t_f}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2 r^{2n-2}}} \quad (14)$$

但し、 $k$ は式(1)の比例定数で、次式で与えられる。

$$n \neq 1 \text{ のとき } k = \frac{A}{-n+1}$$

$$n = 1 \text{ のとき } k = \log(r_1/r_0)/(\theta_1 - \theta_0) \quad (15)$$

図 6(b)に、式(14)の計算結果を示す。この式で  $t_f/t$  は、先の線の太さの設定値から 0.6 と固定している。

〔パラメータ値の決定とマンセンの制作〕 まず  $\rho$  は、視察によって、0.4 以上であれば殆ど微粒子と見なせること、0.4 を下回ると微粒子の“長さ”がやや目立つが、0.05 前後より大きければ移動する微粒子の演示としてそれほど不自然でないことが確認された。

これらの数値を基準にして、図 6(b)のグラフから、 $r$  の下限  $r_0$  を 20 mm と定めると共に、なるべく大きな値の  $\theta_D$  を選択するようにした。すなわち既述の操作角範囲から  $\theta_D = 2\pi/3$  とした ( $r_1$  は、ハードウェアの制約で 120 mm としている)。

一方  $s$  は  $20 \leq r \leq 120$  で式(9)、(10)を満たすように、 $\pi/60$  とした。図 7(a)に重畳線  $r(\theta)$  のパターンを、またこれを図 7(b)の固定マンセンに重ねて反転モアレ (reversal moiré) を形成したものを図 7(c)に示す。この状態で、(a)の重畳マンセンを図示のように時計方向に回転させると、(c)の微粒子群が等速度で拡散される様子が観測できる。

以上は図 3(a)の基本モデルの場合であるが、同図(b)つまり  $n = -1$  に対する重畳マンセンとその反転モアレも、それぞれ図 7(d)、(e)にあわせて示しておく。

### 3.2 同心電極構造間の電子群の移動の場合

同心球状の電極間で、電子群が内側( $r=r_0$ )から外側( $r=r_1$ )へ加速される様子を図 8(a)に示す。これは、図 8(b)の重畳マンセンを図 7(b)の固定マンセンに重畳したものである。OHP 上での演示方法は先と同様で、重畳マンセンを時計方向に回転させると、図 8(a)の電子群が外側の電極に向かって加速される様子を動的に演示できる。以下に、重畳線の式の導出結果のみを示しておく。

$$\nu \propto 1/r_0 - 1/r \quad (16)$$

$$\theta = \theta_1 - D \left\{ (r_1 - r) + r_0 \log \frac{r_1 - r_0}{r - r_0} \right\} \quad (17)$$

$D: \text{const.} (> 0)$

一方、同心円筒の電極構造の場合は次式となる。

$$\nu \propto \log(r/r_0) \quad (18)$$

$$\theta = \frac{1}{k} \int \frac{d\tau}{\log(r/r_0)}, \quad k \text{ は式(1)の比例定数} \quad (19)$$

### 3.3 反転モアレの特徴

モアレと反転モアレは、そのマンセンの制作方法から、明確な区別はつけ難いが、次の 2 つの相違点が見られる。

(1) モアレでは、同心円状進行波の場合のように、2 枚のマンセンのうちどちらを回転させても演示できることがある。しかし反転モアレではどちらを移動させるかが常に決まっている。

(2) 反転モアレでは、微粒子群の移動方向が固定線と同一であるが、モアレによる波動では同一とは限らない。

## 4. 放射状格子縞を用いたダイポールによる電気力線の演示

先の図 2(b)に示す直線放射状マンセンを 2 枚用意し、これらの中心  $O_+$ 、 $O_-$  を多少ずらして重畳すると、図 9(a)のようにダイポールの電気力線の様相を呈する。これに関して、Oster, G. ら<sup>12)</sup>は各曲線が円形になることを示しているが、その密度分布には言及していない。そこで本研究では、適当な断面でのその密度を調べることにより、このモアレパターンが、互いに平行でそれぞれ正負にかつ等密度 ( $\pm \lambda$  [C/m] とする) に帯電した線電荷が呈する field に一致することを証明する。ここに適当な断面は、最も簡単に  $x=0$  とすればよい。

まず、Oster らのモアレの一般式は(20)で表される。

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \Psi(k) \\ G(x, y) &= \Phi(k) \\ \Theta(h, k) &= p \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに、 $F$ 、 $G$  は 2 マンセン上の線群をあらわし、 $h$ 、 $k$ 、 $p$  は整数である。また、 $\Theta$  に任意の関数であるが放射状線群の場合は、

$$h - k = p \quad (21)$$

とすればよい。そして  $O_+$ 、 $O_-$  の座標をそれぞれ  $(w, 0)$ 、 $(-w, 0)$  とすると、 $F$ 、 $G$  は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} y &= (x+w) \tan(h\pi/s) \\ y &= (x-w) \tan(k\pi/s) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

そして、式(21)、(22)より

$$x^2 + \left(y - \frac{w}{Q}\right)^2 = \left[\frac{w(Q^2+1)^{1/2}}{Q}\right]^2 \quad (23)$$

となる。ここに  $Q = \tan(p\pi/s)$  である。さらに式(23)において、 $x=0$  とすると

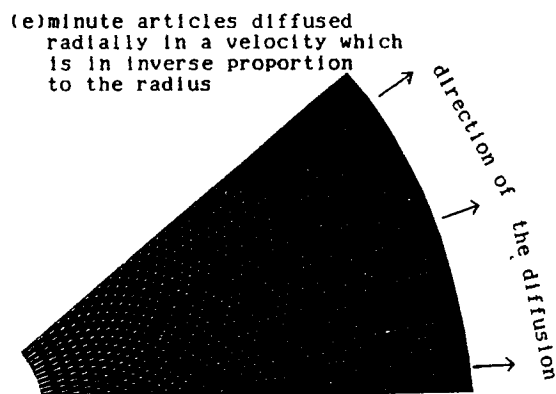
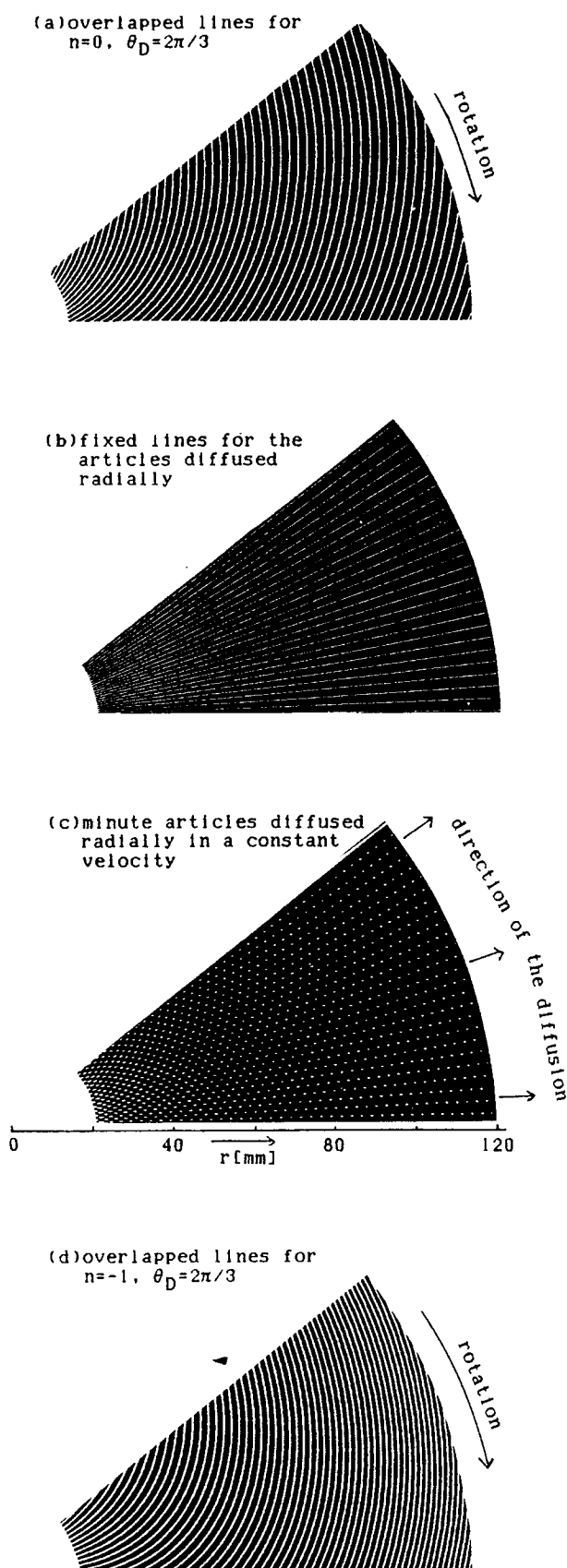


図7 反転モアレによる微粒子群の演示 ( $\theta_D$ : 操作角)  
Fig. 7 Presentation of minute articles by reversal moiré ( $\theta_D$ : angle of operation).

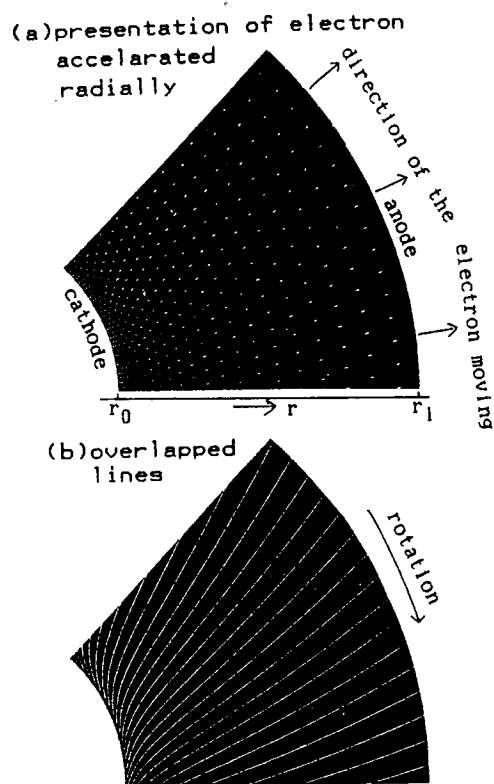


図8 同心球状電極構造のモデル  
Fig. 8 A model of concentric spherical electrodes.

$$\frac{y}{w} = \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} \left( \equiv y_w \right), \quad \delta = p\pi / s \quad (24)$$

を得る。一方,  $y$  軸上の線密度を  $\sigma$  とすると,

$$\sigma \equiv \frac{1}{\left| \frac{dy_w}{d\delta} \right|} = 1 - \cos \delta \quad (25)$$

となる。そこで式(25)を式(24)に代入すると, 結局

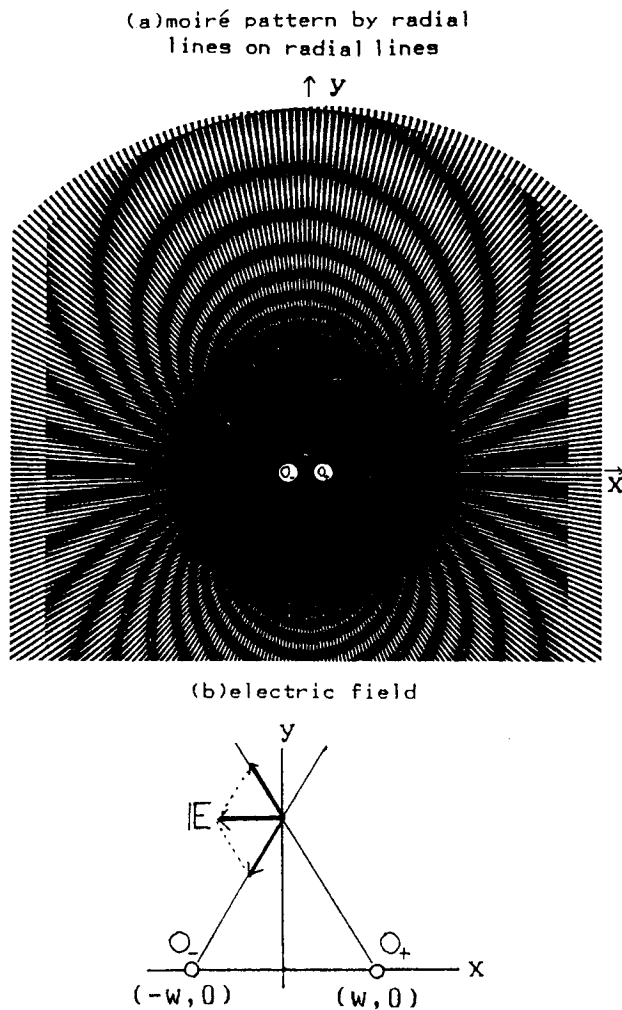


図9 放射状マンセンによる電気力線のモアレ演示  
Fig. 9 Presentation of lines of electric force by radial lines.

$y_w = \sqrt{(2-\sigma)/\sigma}$  つまり  $\sigma = 2/(1+y_w^2)$  (26)  
を得る.

一方、既述の線電荷では、その電気力線が円形であることはよく知られている。そして、図9(b)でy軸上での電界  $E_{x=0}$  は、簡単な計算で

$$E_{x=0} = \frac{\lambda}{\pi w \epsilon_0} \cdot \frac{1}{1+(y/w)^2} \quad (27)$$

となり、式(26)と式(27)の比較から、

$$\sigma \propto E_{x=0} \quad (28)$$

が得られる。以上で所望の事柄が証明された。

## 5. 教具の評価

本研究で開発したOHP教具について、学習者がどのようなイメージを持つかを調査するため、表1(a)に示す21項目のSD法によるアンケート<sup>13)</sup>を制作した。

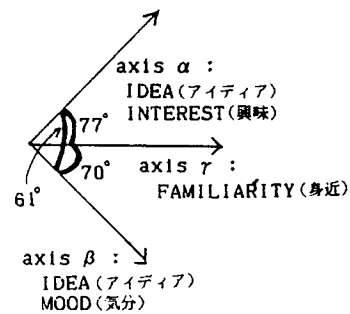


図10 抽出された因子軸  
Fig. 10 Extracted factor axes.

そして学生45名に対して、先のモアレ教具と反転モアレ教具を演示し、その後アンケートに5段階評価で丸をつけてもらった。

回答データは、因子分析して3つの因子軸( $\alpha, \beta, \gamma$ )を抽出するほか、平均値なども求めた。その結果を同表(b), (c)に示す。このうち、因子分析では、主因子解を求めたのち因子構造を単純化するように斜交回転(Oblimax基準)している。表(a)では、因子負荷量の最も大きいものから3つをアンダーラインで示した。一方、因子軸間の方向余弦は図10に示すように、( $\alpha, \beta$ )が0.48、( $\alpha, \gamma$ )が0.35、( $\beta, \gamma$ )が0.22であり、特に $\alpha$ と $\beta$ が最も類似した方向をもっていることがわかる。そして、アンケート項目との対応から、 $\alpha$ と $\beta$ に共通して想起させるものは「アイディア」と考えられる。

次に平均値は、各項目について左側を1、右側を5としたときの値である。因子軸 $\alpha$ と $\beta$ を特徴づける項目は全般に得点が高く、「アイディア」(項目オ, ケ)に関して比較的高得点と結論してよいようである。反面、因子軸 $\gamma$ を特徴づける項目は比較的低得点で、学生にとってあまり「身近」な感じがしないようである。

ところで波動の場合は、その進行の状態の概略を演示すればよいので、必ずしも個々の線を明瞭に示す必要はない。そこでOHPの焦点のぼかしと見やすさとの関連を調べた。いま、OHPの中心Oからステージ上のパターンが像を結ぶまでの距離を結像距離 $\xi$ と呼ぶことにし、Oとスクリーンとの距離を $\eta$ とする。つまり、 $\xi = \eta$ のときスクリーン上に像が明確に再生されている。実験は、 $\xi = \eta, 0.65\eta, 0.46\eta, 0.37\eta$ の4つに対して行った。その結果、 $\xi = 0.46\eta$ と $0.65\eta$ が他より優れており、しかもこれらはほぼ同等と評価された。そして、 $\xi = \eta$ がそれらにつづいて評価された。

表1 モアレ教具に対するアンケート回答の分析

(a) 項 目 (5段階によるSD評価)		(b) 因子構造(斜交解(Oblimax 基準)) (カッコ内は因子パターンを示す)			(c) 平均値 (カッコ内は標準偏差)
1	2	3	4	5	
ア 迫力のない	— 迫力のある	0.17 (−0.17)	<u>0.63</u> ( 0.72)	0.08 ( 0.02)	2.9 ( 0.92)
イ 平凡な	— ユニークな	0.51 ( 0.55)	<u>0.16</u> (−0.12)	0.23 ( 0.06)	4.2 ( 0.70)
ウ 機械的な	— 人間的な	0.20 ( 0.10)	−0.13 (−0.34)	<u>0.70</u> ( 0.74)	2.1 ( 0.88)
エ つまらない	— おもしろい	<u>0.66</u> ( 0.69)	0.32 ( 0.03)	0.15 (−0.09)	3.9 ( 1.00)
オ 不便な	— 便利な	0.34 ( 0.06)	<u>0.67</u> ( 0.67)	0.05 (−0.12)	3.4 ( 1.11)
カ とっつき悪い	— とっつきよい	0.34 ( 0.06)	0.58 ( 0.54)	0.21 ( 0.07)	3.0 ( 0.98)
キ 古い	— 新しい	0.59 ( 0.64)	0.30 ( 0.04)	0.04 (−0.20)	4.2 ( 0.92)
ク 不自然な	— 自然な	0.06 ( 0.03)	0.10 ( 0.08)	0.15 ( 0.14)	2.8 ( 0.69)
ケ ばかげた	— 賢明な	<u>0.68</u> ( 0.66)	0.24 (−0.12)	0.43 ( 0.22)	3.7 ( 0.79)
コ 魅力のない	— 魅力のある	<u>0.85</u> ( 0.67)	0.54 ( 0.16)	0.55 ( 0.28)	3.8 ( 0.98)
サ わかりにくい	— わかりやすい	0.58 ( 0.40)	0.53 ( 0.32)	0.27 ( 0.05)	3.3 ( 1.15)
シ きたない	— きれいな	0.25 ( 0.04)	0.60 ( 0.62)	0.10 (−0.02)	3.6 ( 1.06)
ス 冷たい	— あたたかい	0.13 (−0.24)	0.15 ( 0.04)	<u>0.91</u> ( 0.99)	2.3 ( 0.74)
セ かたくるしい	— うちとけた	0.16 (−0.10)	0.17 ( 0.07)	<u>0.63</u> ( 0.65)	2.6 ( 0.82)
ソ 劣った	— すぐれた	0.60 (−0.66)	0.31 ( 0.04)	0.02 (−0.22)	3.7 ( 0.66)
タ 暗い	— 明るい	0.38 ( 0.01)	<u>0.71</u> ( 0.68)	0.29 ( 0.14)	2.5 ( 1.00)
チ わるい	— よい	0.63 ( 0.48)	0.52 ( 0.27)	0.29 ( 0.06)	3.6 ( 0.82)
ツ 静的	— 動的	0.35 ( 0.35)	0.07 (−0.14)	0.28 ( 0.18)	3.9 ( 1.16)
テ ありふれた	— めずらしい	0.55 ( 0.58)	0.23 (−0.04)	0.17 (−0.03)	4.1 ( 0.92)
ト 無意味な	— 意味のある	0.64 ( 0.66)	0.29 (−0.02)	0.21 (−0.02)	4.0 ( 0.84)
ナ あきる	— 熱中する	0.62 ( 0.67)	0.31 ( 0.03)	0.06 (−0.18)	3.2 ( 0.94)

## 6. む す び

物理現象のシミュレーションは、今日パソコン等を用いて色々な開発が可能であるが、本研究ではOHPに関連した簡易教具という立場から、モアレによる同心円状進行波と反転モアレによる微粒子群の演示方法などをとりあげた。

謝辞: 最後に、本研究に適切な御助言を下された神奈川大学末武国弘教授、福岡教大蓮尾正博教授、また御協力下さった福岡教大中村重太助教授と日大松田浩平君に感謝します。

## 文 献

- (1) Guild, J.: "The Interference Systems of Crossed Diffractings", Oxford Univ. Press, London (1956).
- (2) 玉邑: "符号化格子法による生体の形状および運動計測", 信学技報, MB E80-42 (1980).
- (3) 阪上: "レーザプラズマ光学計測", 信学技報, ED81-17 (1981).
- (4) Drewery, J.O.: "The Zone Plate as a Television Test Pattern", SMPTE J., 88, pp. 763-770 (1979).
- (5) 吉田, 岩本: "固体撮影素子の画像とモアレ", 信学技報, IE80-96 (1980).
- (6) 高島, 白洲: "文字・写真混在画像の網点化", 信学技報, IE83-67 (1983).
- (7) 松林, 北原: "モアレ縞による円形波", 物理教育, 30, 1, pp. 25-29 (1982).
- (8) 北垣: "モアレ・反転モアレによる同心円状進行波・微粒子群の演示のための簡易OHP教具", 昭59信学総全大, 2803.
- (9) Berkley, 飯田監訳: "物理学コース2", p. 90, コロナ社 (昭45).
- (10) 北垣, 末武: "学習者にコメントをフィードバックする成績評価システムの電気磁気学への適用", 日本教工雑誌, 3, 3, pp. 115-123 (1978).
- (11) 相馬, 他: "色彩と形態", p. 57, 福村出版 (1977).
- (12) Oster, G., Wasserman, M. and Zwerling, C.: "Theoretical Interpretation of Moiré Patterns", J.O.S.A., 54, 2, pp. 169-175 (1964).
- (13) 坂元, 岡本, 木村, 島田, 小沢: "CAI学習プログラムの評価技法の開発", 日本教工雑誌, 6, 2, pp. 69-88 (1981).

(昭和59年5月18日受付, 8月6日再受付)

# Simple OHP Equipment for Demonstrating Centrifugal Spherical Waves and Group of Minute Articles by Using Moiré and Reversal Moiré and Their Evaluation

Ikuo Kitagaki, Member

Center for Educational Technology, Fukuoka University of Education,  
Munakata, Japan 811-41

## SUMMARY

This paper describes simple OHP equipment as an aid in the teaching of physics, for example, electromagnetics by demonstrating centrifugal spherical waves and a group of minute articles radially progressing. A Moiré pattern is produced by using two grating transparencies having certain lattices, one fixed, and the other rotated. In this paper, rotating type Moiré patterns are used since they are easy to operate. Each lattice is designed as a function of the propagation velocity of each phenomenon to be demonstrated. The model of the movements of a group of minute articles is used for the divergence in a vector analysis. A reversal Moiré is used for this model. This paper discusses the method of designing the grating transparencies required for these models. Another model for demonstrating the electric force around a dipole is described, formed by overlapping two identical transparencies in a slightly shifted position. It is proven in this paper that this overlapped pattern agrees with the pattern of an electric field formed by a set of parallel lines charged positively and negatively, respectively, and with a homogeneous density. The responses of students to this equipment are analyzed via factor analysis, and the factor axis representing "idea" gains a relatively high mark.

## 1. Introduction

A Moiré pattern is formed when two types of grating are overlapped. The Moiré pattern changes greatly with a minor change of the relative positions of the two gratings. This is used for various precision measurements including engineering apparatus; for

example, crossed diffractings [1], measurements in biological information [2], measurements of displacement in a laser system [3], television test patterns [4], analysis of a CCD image [5], and an improvement of the quality of a facsimile. Moiré patterns have also been attracting attention in the formative arts.

Moiré patterns are being studied for educational uses other than the above-described applications, notably for physics education, e.g., a demonstration of phenomena related to waves. Moiré patterns can simply and dynamically demonstrate a wave phenomenon which is otherwise not easily seen. These patterns are effective educational media since they attract the students' interest. For example, the refraction of plane waves, longitudinal waves, and centrifugal spherical waves [7], are demonstrated for OHP by using a certain set of two grating transparencies: one fixed (a fixed transparency), and the other, moved in a parallel motion (overlapped transparency).

In this paper, the designs of grating transparencies representing centrifugal progressing waves and minute articles progressing in a radial pattern are described mainly for studying electromagnetic systems.

First, centrifugal progressing spherical waves are represented by grating an overlapped transparency for convenience of its operation. The pattern for this transparency is derived as a function of the wave propagation velocity. The rotating of the pattern has advantages in that the centers of the two transparencies can be semifixed with a pin, the deviation of the transparency during the operation can be prevented, and a continuous display can be



carried out by rotating one of the transparencies with a motor.

Second, a group of minute articles, which simulates mainly a fluid motion in a vector analysis, is represented by a Moiré reversal [8] which is a reversed Moiré pattern. The transparencies for this representation are designed by using various parameters which determine the shapes of minute articles other than their velocity.

A case where the two radial grating transparencies are overlapped is also discussed in this paper, although this is a static representation. In this example, it is shown that this Moiré pattern agrees with a set of electric lines produced by two parallel lines having positive and negative electrical charges, respectively.

The word "simple" in the title of this paper means that the use of this OHP equipment is simple and economical. Simplicity and economy are the essential requirements for educational equipment expected to be used widely. This is taken into account, therefore, in the equipment in this paper. A simulation of the centrifugal spherical waves by a Moiré pattern will be useful for educational equipment for demonstrating sound waves for high-school (or younger) students, although this is a limited range of physical phenomena. Since vector analysis is an important item of the curriculum which is common in fluid dynamics, its simulation with the Moiré pattern will be useful in a wide range of educational purposes.

## 2. Model for Centrifugal Spherical Waves

An item of educational equipment for a simulation has two purposes: (1) the demonstration of an actual physical phenomenon; and (2) the establishment of a model. The Moiré patterns described in this section are mainly for the latter, i.e., the development of a fundamental model. The model deals with centrifugal spherical waves propagating in a homogeneous medium or in a medium whose propagation constant varies in a concentric circular shape, its propagation velocity being established initially with a relatively simple function.

Since the wave motion is demonstrated by turning the pattern, a combined pattern of the line group on the fixed grating transparencies (fixed lines) and that on the overlapped grating transparencies (overlapped lines) must be independent of the direction of its rotation. This means that the two groups of lines must be stretched radially from the center, and their pitch must be

equal. Since the Moiré pattern is determined solely by the relative position of the two groups of lines, the fixed lines are chosen to be straight lines. When the two groups of transparencies are overlapped, all the cross points of the two groups of lines move toward their edges with the rotation of the overlapped lines, as shown in Fig. 1, and they demonstrate the propagation of centrifugal spherical waves. The overlapped lines are represented by a polar coordinate  $(r, \theta)$ , and the propagation velocity  $v$  is given by the following equation:

$$v \propto r^n \quad (1)$$

From Fig. 1, the following equation holds:

$$v = dr/d\theta \quad (2)$$

where  $\theta$  can be regarded as the angle of rotation of the overlapped transparency itself. For obtaining  $r(\theta)$ , the boundary equation  $r = r_0$  at  $\theta = \theta_0$ , and  $r = r_1$  at  $\theta = \theta_1$  ( $\theta_1 > \theta_0$ );  $r_0$  and  $r_1$  are the two ends of the overlapped lines, for convenience;  $r_1 > r_0$  can generally be acceptable. From Eqs. (1) and (2), the following solutions are obtained.

When  $n \neq 1$ ,

$$r = (A\theta + B)^{\frac{1}{-n+1}} \quad (3)$$

where

$$A = \frac{r_1^{-n+1} - r_0^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0}, \quad B = \frac{\theta_1 r_0^{-n+1} - \theta_0 r_1^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0} \quad (4)$$

When  $n = 1$ ,

$$r = C \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{\theta}{\theta_1 - \theta_0}} \quad (5)$$

where

$$C = r_0^{\frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_0}} \cdot r_1^{-\frac{\theta_0}{\theta_1 - \theta_0}} \quad (6)$$

$\theta_1 - \theta_0$  ( $\equiv \theta_D$ ) is the angle required for moving  $r_0$  to  $r_1$ . Let us call  $\theta_D$  "the angle of operation." If  $\theta_D$  is too small, the wavefront in the demonstration pattern moves too much, making it hard to see. If  $\theta_D$  is too large, the manual operation becomes difficult. It has been found experimentally that  $\theta_D$  between about  $\pi/16$  and  $2\pi/3$  gives the best result. Let us call this range "the operation angle range."

Let a pitch between the lines be  $s$  (rad), and the thickness of each line be  $s_w$

(rad). To make the wave pattern independent of  $r$ , as much as possible, the thickness of the line is taken in proportion to  $r_0$ ;  $s$  and  $s_w$  are chosen as follows.

If  $s$  is too small, adjacent lines are overlapped around the center of the pattern, losing the Moiré pattern;  $s_w$  has a property similar to that of  $s$ . These values are chosen, therefore,  $s = \pi/160$  and  $s_w = 0.4 s$ .

Figure 2 shows examples of the grated transparencies designed: (a) as the overlapped lines for  $n = 0$ ; (b) the fixed lines; and (c) the overlapped pattern of (a) and (b); (c) shows a constant wavelength, since  $n = 0$ . When the overlapped transparency (a) is turned clockwise, the centrifugal propagation of circular wavefronts can be seen.

### 3. Model of the Radial Propagation of a Group of Minute Articles by Using a Reversal Moiré

The grated transparencies for a reversal Moiré are made by drawing a group of lines with an extremely fine pen, and by reversing them (making the lines transparent). When the two transparencies are overlapped, light can pass through only the cross points of lines so that each cross point represents a minute article.

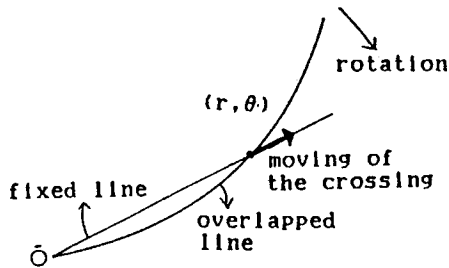
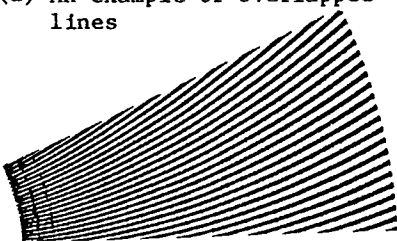
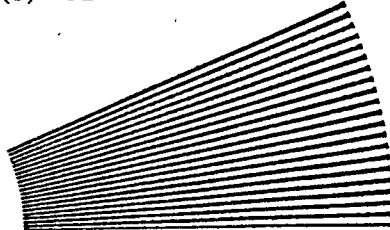


Fig. 1. Moving of a crossing.

(a) An example of overlapped lines



(b) Fixed lines



(c) Circular waves moving in a constant velocity

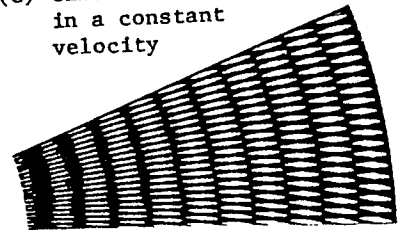


Fig. 2. Presentation of circular waves by Moiré.

### 3.1 Fluid in a vector analysis

Figure 3 shows patterns relating to a "divergence" (after Berkley [9]). Both Figs. 3(a) and (b) show fundamental models. There are many wrong answers by students to a question of vector analysis of Berkley's fluid model [10]. The patterns shown in Fig. 3 are considered to be an important example in assisting the students in correct understanding of this phenomenon.

Using a cylindrical coordinate ( $r, \theta, z$ ),  $\text{div } A$  in a vector space  $A$  is expressed by

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (7)$$

For the case shown in Fig. 3,  $\partial/\partial\theta = \partial/\partial z = 0$ , i.e., only the first term of Eq. (7) remains. Therefore,

$$\text{div } A = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} \quad (8)$$

Figure 3(a) shows the model for  $a_r = \text{const}$ , and Fig. 3(b) shows that for  $a_r \propto 1/r$ . When  $v = a_r$  in Eqs. (1) and (2), Fig. 3(a) corresponds to a case for  $n = 0$ , and Fig. 3(b) to  $n = -1$ .

For the study of presuming a fluid model from  $\text{div } A$ , it is often simply assumed that  $\text{div } A = 0$  or  $\text{div } A = \text{const}$  (not zero). For such  $a_r \propto 1/r$ ,  $a_r \propto r$ .

Considering as above, it will be sufficient to provide three kinds of models,  $n = -1, 0$ , and  $1$ , for educational purposes. The already-mentioned Berkley model is described in this paper.

For determining the pattern of the overlapped lines, Eq. (3) or Eq. (5) can be used, similarly to the case of the above-described circular progressing waves. The fixed lines should be radial, since the

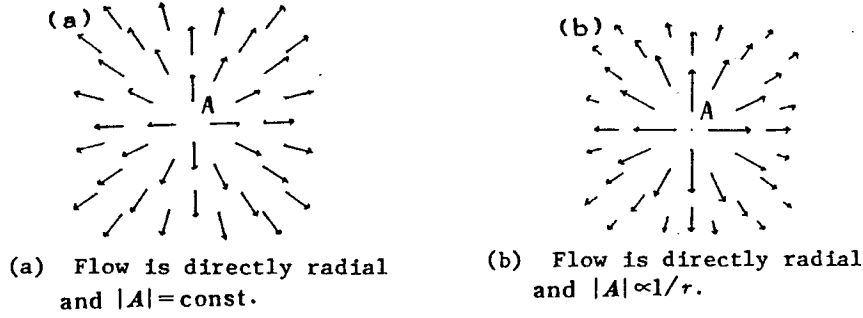


Fig. 3. Model for "divergence."

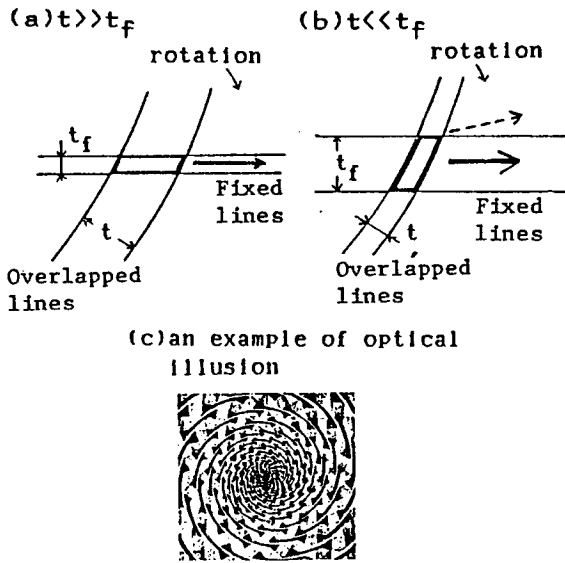


Fig. 4. Shape of a minute article and its optical illusion.

direction of each fixed line is the same as the direction of propagation of minute articles. To represent the group of minute articles as a checkered pattern, the pitch of the fixed lines  $s_f$  is chosen as half the pitch of the overlapped lines  $s_f$ .

The following parameters required for drawing the lines are shown by using the case of  $n = 0$ .

Thickness of lines  $t$  and  $t_f$

It is assumed that the thickness  $t_f$  of the fixed lines  $r_f(\theta)$  and the thickness  $t$  of the overlapped lines  $r(\theta)$  are constant independently of  $r$ .

Figures 4(a) and (b) show the shapes (thick frames) of a minute article for

$t \gg t_f$  and  $t \ll t_f$ , respectively. When the overlapped transparency is turned clockwise, the minute articles move in the direction of the thick arrow in each of Figs. (a) and (b). Figure 4(b) on the OHP, however, suggests the minute article moving in an upper-right direction (dotted arrow) due to its shape. This optical illusion is similar to another illusion in Fig. 4(c): a set of concentric circles appears to be spiral [11]. To avoid this illusion, a condition  $t > t_f$  is added. If  $t \gg t_f$ , however, the image of a minute article becomes unclear since the crossed area is too small. Considering all the requirements, the values are determined:  $t = 0.3 \text{ mm}$  and  $t_f = 0.18 \text{ mm}$ .

Distance between two adjacent lines

Let the distance between two adjacent lines [shown by a thick line in Fig. 5(a)] be  $\tau(\theta)$ , and the tangential line coordinate form be  $r(\theta)$ . To avoid the overlapping of adjacent lines in a grated transparency, following conditions are required.

Overlapped lines:

$$t < \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \tau(\theta) \quad (9)$$

where  $(\theta) = |r(\theta) \text{ s cons } \xi|$ .

Fixed lines:

$$t_f < \min_{r_0 \leq r \leq r_1} r \cdot s / 2 = r_0 s / 2 \quad (10)$$

Figure 5(b) shows examples of calculated value of  $\tau$  in Eq. (9);  $\theta_p$  in this figure shows the angle of operation. It is known from the analysis that Eq. (9) can be replaced by the following equation, independently of  $n$ :

$$t < \min(\tau(\theta_0), \tau(\theta_1)) \quad (11)$$

Likelihood of a minute article

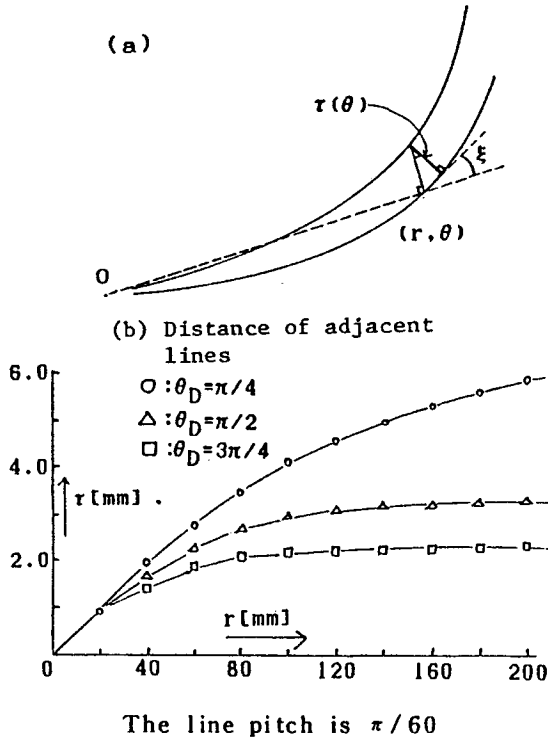


Fig. 5. Distance of adjacent lines  $r(\theta)$ .

If the angle of the fixed lines and the overlapped lines are similar around the cross point of the two kinds of lines, the shape of a minute article becomes an elongated parallelogram as shown by the thick line in Fig. 6(a), since the thickness of the lines is no longer negligible. The "likelihood of a minute article"  $\rho$  can be represented by the base and height of the parallelogram as follows:

$$\rho = t_f / l = t_f |\sin \xi| / t \quad (12)$$

where  $\rho < 1$ , since  $t > t_f$ . By using the following equation:

$$\tan \xi = r / (dr/d\theta) \quad (13)$$

becomes as follows:

$$\rho = \frac{t_f}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 r^{2n-2}}} \quad (14)$$

where  $k$  is the constant of proportion in Eq. (1), and given as follows:

$$\text{when } n = 1 \quad k = \frac{A}{-n+1}$$

$$\text{when } n = 1 \quad k = \log(r_1/r_0)/(\theta_1 - \theta_0) \quad (15)$$

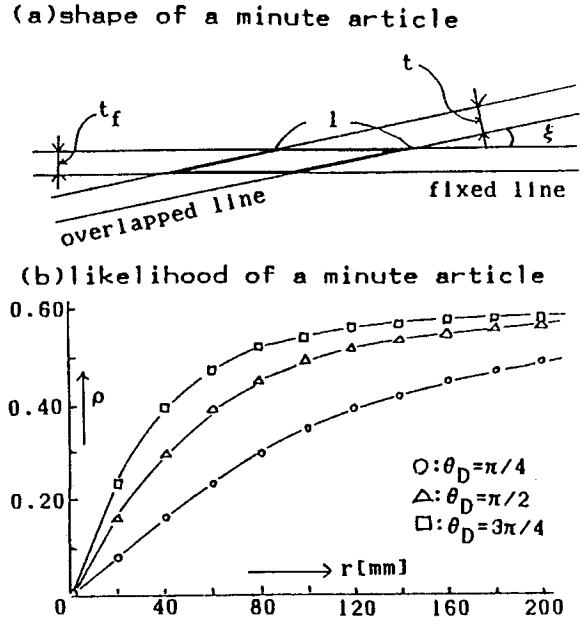


Fig. 6. Shape of a minute article and likelihood of a minute article ( $\theta_D$ : angle of operation).

Figure 6(b) shows the results of calculation of Eq. (14). In this equation,  $t_f/t$  is chosen to be 0.6, from the thickness of the line previously described.

#### Determination of Values for the Parameters, and Making Grating Transparencies

It has been confirmed by a visual inspection that a minute article can be recognized when  $\rho$  is greater than 0.4. Also, it appears to be a naturally moving article when  $\rho$  is greater than about 0.05, although the longer axis of the article somewhat disturbs its image when  $\rho$  is less than 0.4. Based on these data, and referring to Fig. 6(b), the lower limit of  $r$  (which is  $r_0$ ) was chosen to be 20 mm, and  $\theta_D$  was chosen as large as possible;  $\theta_D = 2\pi/3$  was chosen from the previously described range of the angle of operation;  $r_1 = 120$  mm was chosen from the restriction of the hardware.

$s = \pi/60$  was chosen to satisfy  $20 \leq r \leq 120$  in Eqs. (9) and (10). Figure 7(a) shows the pattern of the overlapped lines  $r(\theta)$ . Figure 7(b) shows the fixed grating transparency. Figure 7(c) shows the pattern formed by overlapping (a) over (b). When (a) is turned clockwise, (c) appears as if a group of minute articles scatter centrifugally at a uniform velocity. These examples are based on the fundamental model shown in Fig. 3(a).

Figures 7(a) and 7(e) show similar patterns based on the fundamental model shown in Fig. 3(b), i.e., for  $n = -1$ .

### 3.2 Representation of a group of electrons in a set of concentric spherical electrodes

Figure 8(a) shows a representation of a group of electrons in a set of concentric spherical electrodes in which the electrons are accelerated from the inner electrode ( $r = r_0$ ) to the outer electrode ( $r = r_1$ ). This pattern is formed by overlapping the overlapped transparency shown in Fig. 8(a) on the fixed grating transparency shown in Fig. 7(b). The same method of the OHP demonstration is applied to this set; i.e., when the overlapped transparency is rotated clockwise, the group of electrodes shown in Fig. 8(a) moves toward the outer electrode so that their acceleration is demonstrated dynamically. The equations representing the overlapped transparencies are as follows:

$$\nu \propto 1/r_0 - 1/r \quad (16)$$

$$\theta = \theta_1 - D \left[ (r_1 - r) + r_0 \log \frac{r_1 - r_0}{r - r_0} \right] \quad (17)$$

$D: \text{const.} (> 0)$

The equation representing the concentric electrodes is as follows:

$$\nu \propto \log(r/r_0) \quad (18)$$

where  $k$  is the constant of proportion in Eq. (1).

$$\theta = \frac{1}{k} \int \frac{dr}{\log(r/r_0)}, \quad (19)$$

### 3.3 Features of the reversal Moiré pattern

A Moiré pattern and a reversal Moiré pattern are similar, but they are different in the following points.

(1) In a Moiré pattern, this can be demonstrated by turning any one of the transparencies as an example for the centrifugal spherical waves. In a reversal Moiré, a particular transparency must be turned.

(2) In a reversal Moiré pattern, the direction of movement of the minute articles is the same as that of the fixed lines. This is not necessarily the same for a wave motion in the Moiré pattern.

### 4. Demonstration of Electric-Force Lines

When two identical copies of grating transparencies having radial straight-lines are superimposed with a slight shift in their

relative positions, they represent a group of electric-force lines around a dipole having two centers  $0_+$  and  $0_-$  as shown in Fig. 9(a). Oster et al. [12] have reported that each curve in this pattern forms a circle, but they have not described the density distribution. The author investigates the density on an appropriate sectional area, and proves in this paper that these Moiré patterns are parallel to each other, and that the pattern agrees with the pattern of an electrical field having positively and negatively charged poles, respectively, and a homogeneous charge density, i.e.,  $\pm \lambda$  (C/m). The sectional area is chosen simply as  $x = 0$ .

The general equations of the Moiré pattern given by Oster et al. are described by

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \Psi(h) \\ G(x, y) &= \Phi(k) \\ \Theta(h, k) &= p \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

where  $F$  and  $G$  are two groups of lines on each grating transparency pattern, and  $h$ ,  $k$  and  $p$  are integral numbers, respectively. In general,  $\theta$  is an arbitrary function, but in this particular case of group of radial lines,

$$h - k = p \quad (21)$$

Taking the coordinates of  $0_+$  and  $0_-$  as  $(w, 0)$  and  $(-w, 0)$ , respectively,  $F$  and  $G$  become:

$$\left. \begin{aligned} y &= (x + w) \tan(h\pi/s) \\ y &= (x - w) \tan(k\pi/s) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

From Eqs. (21) and (22),

$$x^2 + \left(y - \frac{w}{Q}\right)^2 = \left[\frac{w(Q^2 + 1)^{1/2}}{Q}\right]^2 \quad (23)$$

when  $Q = \tan(p\pi/s)$ . Putting  $x = 0$  in Eq. (23), the following equation is obtained:

$$\frac{y}{w} = \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} \left( \equiv y_w \right), \quad \delta = p\pi/s \quad (24)$$

Letting the line density on the  $y$  axis be  $\sigma$ ,

$$\sigma \equiv \frac{1}{\left| \frac{dy_w}{d\delta} \right|} = 1 - \cos \delta \quad (25)$$

By substituting Eq. (25) into Eq. (24),  $y_w = \sqrt{(2 - \sigma)/\sigma}$  can be obtained:

$$\sigma = 2 / (1 + y_w^2) \quad (26)$$

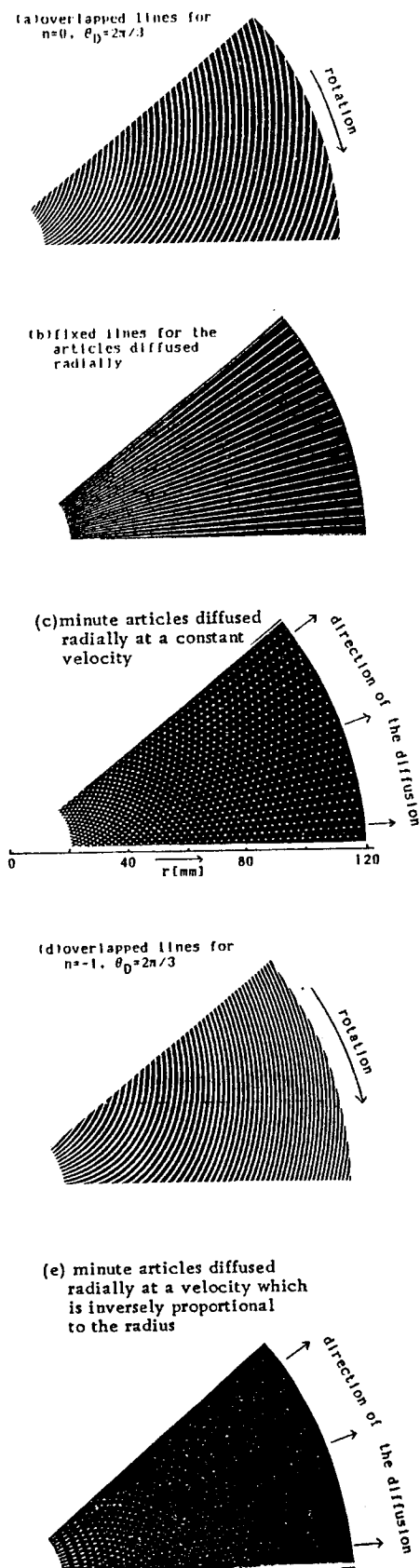


Fig. 7. Presentation of minute articles by reversal Moiré ( $\theta_D$ : angle of operation).

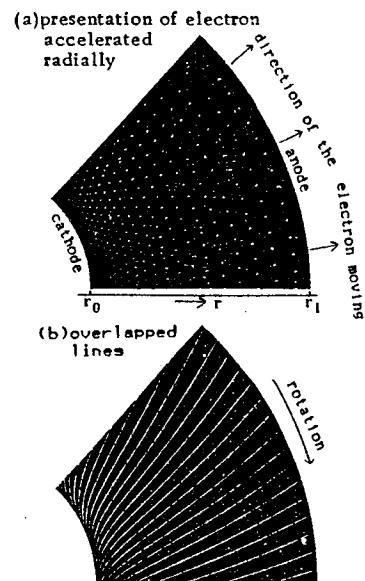


Fig. 8. A model of concentric spherical electrodes.

It is well known that the electric force lines of the above-described line-charge form a circular pattern. The electric field  $E_{x=0}$  on the y axis in Fig. 9(b) can be calculated as

$$E_{x=0} = \frac{\lambda}{\pi w \epsilon_0} \cdot \frac{1}{1 + (y/w)^2} \quad (27)$$

By comparing Eq. (26) with Eq. (27),

$$\sigma \propto E_{x=0} \quad (28)$$

This proves the initial question.

## 5. Evaluation of Educational Equipment

To investigate the reactions of students to this set of OHP equipment, a questionnaire consisting of 21 questions in the SD method, as shown in column (a) of Table 1, was made. The above-described Moiré pattern equipment was demonstrated to 45 students, and their comments were obtained by marking in a 5-graded evaluation scale.

The data showing the students' response to this questionnaire were analyzed in three factors ( $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ ), and their mean values were also obtained, as shown in columns (b) and (c) of Table 1. To simplify the factor structure in the factor analysis, an oblique intersection rotation (oblimax

Table 1. Analysis of students' response to the questionnaire on the Moiré educational equipment

(a) SD evaluation in 5 grades					(b) Factor structure, oblimax based. (Figures in parentheses show the factor pattern)			(c) Mean val. (Fig. in parenth. shows the standard deviation)
1	2	3	4	5	Factor axis $\alpha$	Factor axis $\beta$	Factor axis $\gamma$	
A Not convincing		Convincing			0.17 (-0.17)	0.63 ( 0.72)	0.08 ( 0.02)	2.9 ( 0.92)
B Ordinary		Unique			0.51 ( 0.55)	0.16 (-0.12)	0.23 ( 0.06)	4.2 ( 0.70)
C Mechanical		Human			0.20 ( 0.10)	-0.13 (-0.34)	0.70 ( 0.74)	2.1 ( 0.88)
D Uninteresting		Interesting			0.66 ( 0.69)	0.32 ( 0.03)	0.15 (-0.09)	3.9 ( 1.00)
E Inconvenient		Convenient			0.34 ( 0.06)	0.67 ( 0.67)	0.05 (-0.12)	3.4 ( 1.11)
F Definitely bad		Definitely good			0.34 ( 0.06)	0.58 ( 0.54)	0.21 ( 0.07)	3.0 ( 0.98)
G Old		New			0.59 ( 0.64)	0.30 ( 0.04)	0.04 (-0.20)	4.2 ( 0.92)
H Unnatural		Natural			0.06 ( 0.03)	0.10 ( 0.08)	0.15 ( 0.14)	2.8 ( 0.69)
I Foolish		Clever			0.68 ( 0.66)	0.24 (-0.12)	0.43 ( 0.22)	3.7 ( 0.79)
J Unattractive		Attractive			0.85 ( 0.67)	0.54 ( 0.16)	0.55 ( 0.28)	3.8 ( 0.98)
K Not easy to underst.		Easy to underst.			0.58 ( 0.40)	0.53 ( 0.32)	0.27 ( 0.05)	3.3 ( 1.15)
L Shabby		Pretty			0.25 ( 0.04)	0.60 ( 0.62)	0.10 (-0.02)	3.6 ( 1.06)
M Cold		Warm			0.13 (-0.24)	0.15 ( 0.04)	0.91 ( 0.99)	2.3 ( 0.74)
N Formal		Frank			0.16 (-0.10)	0.17 ( 0.07)	0.63 ( 0.65)	2.6 ( 0.82)
O Inferior		Superior			0.60 (-0.66)	0.31 ( 0.04)	0.02 (-0.22)	3.7 ( 0.66)
P Dark		Bright			0.38 ( 0.01)	0.71 ( 0.68)	0.29 ( 0.14)	2.5 ( 1.00)
Q Good		Bad			0.63 ( 0.48)	0.52 ( 0.27)	0.29 ( 0.06)	3.6 ( 0.82)
R Static		Dynamic			0.35 ( 0.35)	0.07 (-0.14)	0.28 ( 0.18)	3.9 ( 1.16)
S Common		Novel			0.55 ( 0.58)	0.23 (-0.04)	0.17 (-0.03)	4.1 ( 0.92)
T Meaningless		Meaningful			0.64 ( 0.66)	0.29 (-0.02)	0.21 (-0.02)	4.0 ( 0.84)
U Tired		Enthusiastic			0.62 ( 0.67)	0.31 ( 0.03)	0.06 (-0.18)	3.2 ( 0.94)

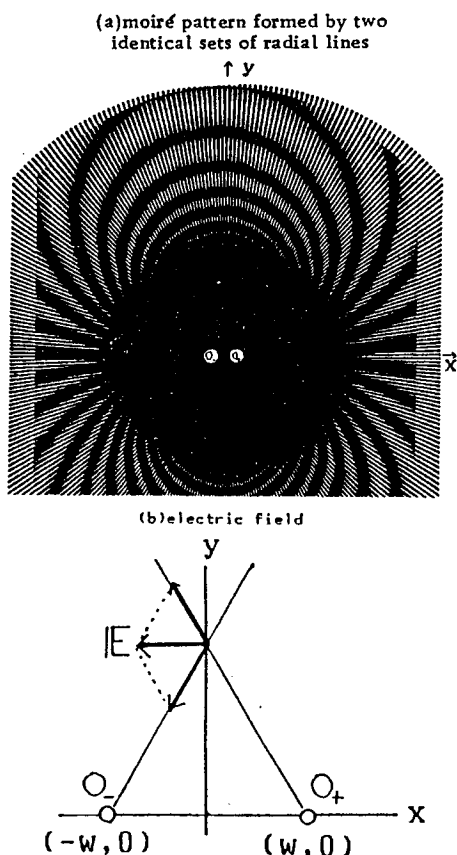


Fig. 9. Presentation of lines of electric force by radial lines.

criterion) was employed, after the solution of the main factors was obtained. In column (a) of Table 1, the three largest factor loadings are underlined. The direction cosine between the factor axes are: 0.48 for  $(\alpha, \beta)$ ; 0.35 for  $(\alpha, \gamma)$ ; and 0.22 for  $(\beta, \gamma)$ , as shown in Fig. 10. This shows that  $\alpha$  and  $\beta$  have most closed directions. Referring to questions in Table 1, an item which is common in  $\alpha$  and  $\beta$  is considered to be "IDEA."

The mean values in column (c) of Table 1 are calculated by taking 1 for the left-side question item, and 5 for the right-side question item. An item which characterizes the factor axes  $\alpha$  and  $\beta$  obtained generally a high mark. For example, it can be considered that "IDEA" (shown in E and I in column (a) of Table 1) have relatively high marks. An item characterizing the factor axis  $\gamma$  has a lower mark, i.e., the students did not have a "FAMILIAR" feeling with it.

It is not necessary to show each line clearly in a demonstration of waves, since only a demonstration of their position is required. For this kind of application, the relationship between the not-sharply focused OHP image and the easiness of seeing it was

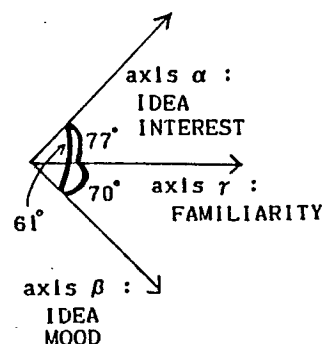


Fig. 10. Extracted factor axes.

investigated. Let us call the distance, between the center 0 of the OHP and the point on which the pattern on the stage focuses, as an "image-making distance"  $\xi$ . Let the distance between 0 and the screen be  $\eta$ . The image on the screen becomes clear at  $\xi = \eta$ . Experiments were carried out by using  $\xi = \eta$ ,  $0.65 \eta$ ,  $0.56 \eta$  and  $0.37 \eta$ . Better results were obtained at  $\xi = 0.46 \eta$  and  $\xi = 0.65 \eta$ , than others; the quality of the images obtained with these two values is almost equal; and that of  $\xi = \eta$  was the next best.

## 6. Conclusion

At present, simulations of physical phenomena are carried out with computers. This paper describes, however, a simple educational OHP equipment using the Moiré patterns and reversal Moiré patterns which demonstrate centrifugal spherical waves and a group of minute articles, respectively.

**Acknowledgements.** The author wishes to express his thanks to Prof. Kunihiro Suetake (Kanagawa Univ.), Prof. Masahiro Hasuo (Fukuoka University of Education) for their advice, and to Associate Prof. Jukta Nakamura (Fukuoka University of Education) and Mr. Kouhei Matsuda (Nihon Univ.) for their cooperation.

## REFERENCES

1. J. Guild. The Interference Systems of Crossed Diffractions, Oxford Univ. Press, London (1956).
2. Tamamura. Measurements of the shape and movements of a living body by using a coded lattice method, Tech. Rep. I.E.C.E., Japan, MBE80-42 (1980).
3. Sakagami. Laser plasma optical measurements. Tech. Rep. I.E.C.E., Japan, ED81-17 (1981).
4. J.O. Drewery. The Zone Plate as a Television Test Pattern, SMPTE J., 88, pp. 763-770 (1979).



5. Yoshida and Iwamoto. Image and Moiré of a solid-state image sensor. Tech. Rep. IE80-96 (1980).
6. Takashima and Usubuchi. Conversion of a letter-photograph mixed image into a grid image. Tech. Rep. I.E.C.E., Japan, IE83-67 (1983).
7. Matsubayashi and Kitahara. Circular waves by using the Moiré pattern. Physics Education, Japan, 30, 1, pp. 25-29.
8. Kitagaki. Simple OHP equipment for the determination of centrifugal spherical waves [a group of minute articles using Moiré] reversal Moiré. Nat. Conf. I.E.C.E., Japan, 2803 (1984).
9. Berkley (translated by Iida). Physics Course 2, p. 90, Corona-sha (1970).
10. Kitagaki and Suetake. Application of a computerized evaluation system giving comments to learners to electro-magnetics—Analysis and evaluation of answer patterns for network type multiplier choice test problems, Japan Jour. Educ. Tech., 3, 3, pp. 115-123 (1978).
11. Soma et al. Colors and shapes, pp. 57, Fikumura Shuppan-sha (1977).
12. G. Oster, M. Wasserman and C. Zwerling. Theoretical Interpretation of Moiré Patterns, J.O.S.A., 54, 2, pp. 169-175 (1964).
13. Sakamoto, Okamoto, Kimura, Shimada and Ozawa. Development of evaluation methods for CAI materials, Japan Jour. Educ. Tech., 6, 2, pp. 69-88 (1981).

## 論文

## モアレを利用した物理系簡易OHP教具の開発

正員 北垣 郁雄<sup>†</sup>

## Development of Several OHP Equipments of Physics Using Moiré

Ikuo KITAGAKI<sup>†</sup>, Member

あらまし モアレ現象を利用した物理系の簡易OHP教具をいくつか報告する。第1は、同心円状進行波に関するものである。モアレは多数の直線や曲線で構成された所定のパターンを2枚重ねて発生させるが、これらのパターンをその波動の伝搬速度の関数として求めている。第2は、ベクトル解析での“発散”などに指導に用いる流体モデルであり、らせん状に進行する流体を、モアレと裏腹の技法ともいえる反転モアレを用いてシミュレーションする。第3は、一対の点電荷が呈する電気力線をシミュレーションする教具である。いずれも、電磁気学で用いる教材である。尚、それぞれのパターンは、モアレ現象の見やすさなども含めて設計している。本論文では、これらのパターンの設計の手続きを述べ、そのうち、本教具を実際に使用するにあたっての留意点などを考察する。

## 1 ま え が き

モアレは、多数の直線や曲線で構成された2種類のパターンを重ね合わせることで生じ、高精度の測量や物理現象のOHP教具に利用される。特に後者では、疎密波や平面波などの伝搬現象を比較的簡単にシミュレーションでき、また学習者に造形的興味を引き起こすことが多いので、学習意欲を高める簡易教具とされている。

ところで波動の学習では、一媒質中の波動伝搬だけでなく、光の屈折などのように媒質の不連続面近辺での伝搬方向・速度の変化の把握も重要で、モアレを利用したそのシミュレーションもいくつか報告されている<sup>(1),(2)</sup>。これに対して、パソコンによる動的な物理現象のシミュレーションが普及し、物理系教育者の大きな興味の対象となっているのも事実である。しかしモアレでは、OHPという科学系授業でよく用いる提示装置をそのまま利用することができ、今後も物理系における教育メディアの一つになるといえる。

そのような視点から、筆者は既にモアレを用いて、同心円状に進行する波動や、ベクトル解析での流体モデルなどのOHP教具を報告した<sup>(3),(8)</sup>。ここでは、各現象の基本的なモデルをとりあげたが、今回は、基本

モデルと対にして学習者に提示するようないわば応用モデルの開発を行う。ここでとりあげた教材は、次の三つである。

第1に、同心円状進行波に関して、伝搬速度が同心円上で不連続的に変化するモデルをとりあげて、そのモアレの発生に供するパターンの設計を行う。これは、2枚のパターンを重畳したのち互いに並進移動させて発生させることもできる<sup>(4)</sup>が、本研究では、操作性の容易さから回転式を用い、その場合のパターンの形状を定式化している。

第2に、ベクトル解析では、その概念把握のために流体モデルを使用する<sup>(6)</sup>。モアレと裏腹の技法ともいえる反転モアレを用いると、流体が一点から放射状かつ直線状に移動する様子が示される<sup>(3)</sup>が、本研究ではその現象としばしば比較されるらせん状モデルの開発を行う。尚これは、パークレイのモデル<sup>(5)</sup>をもとにしたものである。

第3に、静的現象ではあるが、双極子の電気力線の表示の技法をとり扱う。双極子は、その電気力線の形状が重要な学習項目の一つといえる。

本論文では、これらのモアレに用いるパターンの設計法を中心に述べる。

## 2 同心円状進行波

本章では、同心円状進行波をシミュレーションするモアレ用パターンの設計を行う。ところでモアレでは、

<sup>†</sup>福岡教育大学教育学センター、宗像市

Center for Educational Technology, Fukuoka University of Education, Munakata-shi, 811-41 Japan

基本的には1枚のパターンをOHP上に固定(固定パターン)し, 他方を重畳(重畳パターン)したのち, これを移動させて波動などのシミュレーションを行う。今の場合, “移動”は“回転”に相当する。

ここでは, 伝搬速度に関して同心円状に不連続面をもつようなモデルをとりあげるが, 不連続面は一つと限定した。これは, 二つ以上の場合には, 帰納的な指導法で可能と思われるほか, OHPステージに大きさの制約があるからである。

さてこの波面は, 重畳パターンをどの位置に回転しても常に円形であるので, 固定パターン上の線群(固定線群)と重畳パターン上の線群(重畳線群)は等間隔の放射線群でなければならない。尚, モアレはこれらの放射状パターンの相対的位置関係のみで定まるので, 固定線は最も簡単に直線状としておく。

まず, 固定パターンと重畳パターンを, それぞれの放射線群の中心(0とする)が一致するように重畳させるものとする。すると, 重畳線群と固定線群との各交点は, 図1に示すように重畳パターンの回転と共に遠心的に移動する。全体的に見れば, この模様移動が後の図2(c)のように同心円状進行波の様子を表わすことになる。さらに重畳パターンを等速回転させたときの波動の伝搬速度を $v$ とし, また1本の重畳線を極座 $r(\theta)$ で表わすと, 図1より次式が成り立つ。

$$v = A dr/d\theta \quad (A: \text{const.}) \quad (1)$$

次に,  $v$  を次式で初期設定する。

$$v = B r^n \quad (B: \text{const.}) \quad \text{即ち} \quad dr/d\theta = C r^n \quad (C \equiv B/A) \quad (2)$$

ここに,  $n$  は整数であるが, 教材としては  $n = -2 \sim 2$  の5種類で十分と思われる。

いま,  $r_0 \leq r < r_d$  が媒質1,  $r_d \leq r < r_1$  が媒質

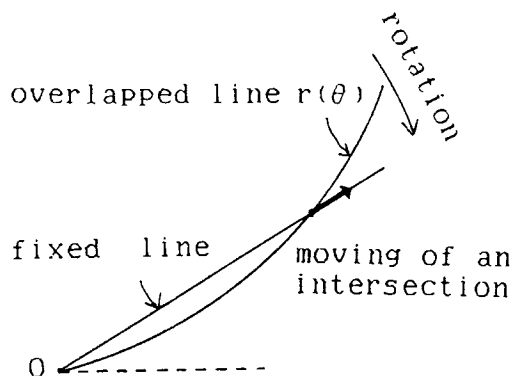


図1 交点の移動  
Fig. 1 Moving of an intersection.

Ⅱとし, 各媒質にかかわる変数や定数をそれぞれ添字1, Ⅱをつけて区別する。また,  $r$  の  $r_0, r_d, r_1$  の値に対する  $\theta$  をそれぞれ,  $\theta_0, \theta_d, \theta_1$  とする。そして, 波動は  $r = r_d$  を通過する際, その伝搬速度が  $\mu$  倍になるものとする。この境界条件の下に式(2)の解<sup>(8)</sup>(付録)から重畳線  $r(\theta)$  を求めると, 次式が得られる。

1)  $n_I \neq 1, n_{II} \neq 1$  のとき

$$r = \begin{cases} \left\{ r_0^{-n_I+1} + \frac{(r_d^{-n_I+1} - r_0^{-n_I+1})\theta}{\theta_d - \theta_0} \right\}^{\frac{1}{-n_I+1}} & r_0 \leq r < r_d \\ \left\{ r_d^{-n_{II}+1} + \mu K_I (\theta - \theta_d) \right\}^{\frac{1}{-n_{II}+1}} & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (3)$$

ここに,

$$K_I = \frac{r_d^{-n_I+1} - r_0^{-n_I+1}}{(-n_I+1)(\theta_d - \theta_0)} \quad (4)$$

2)  $n_I \neq 1, n_{II} = 1$  のとき

$$r = \begin{cases} 1) \text{に同じ} & r_0 \leq r < r_d \\ r_d \exp\{\mu K_I r_0^{n_I-1}(\theta - \theta_d)\} & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (5)$$

3)  $n_I = 1, n_{II} \neq 1$  のとき

$$r = \begin{cases} \frac{\theta_d}{\theta_d - \theta_0} \cdot r_d^{-\frac{\theta_0}{\theta_d - \theta_0}} \cdot \left( \frac{\theta}{\theta_d - \theta_0} \right)^{\frac{\theta}{\theta_d - \theta_0}} & r_0 \leq r < r_d \\ \left\{ r_d^{-n_{II}+1} + \mu K_2 (\theta - \theta_d) \right\}^{\frac{1}{-n_{II}+1}} & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (6)$$

ここに,

$$K_2 = \{\log(r_d/r_0)\}/(\theta_d - \theta_0) \quad (7)$$

4)  $n_I = n_{II} = 1$  のとき

$$r = \begin{cases} 3) \text{に同じ} & r_0 \leq r < r_d \\ r_d \exp\{\mu K_2 (\theta - \theta_d)\} & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (8)$$

最も一般的なモデルはやはり  $n_I = n_{II} = 0$  の場合と思われるので, その場合の重畳パターンと固定パターンの一部を, それぞれ図2(a), (b)に示す。そして, これらを重畳したときのモアレパターンを図(c)に示す。これは  $\mu = 0.5$  つまり  $v_I = 2v_{II} (= \text{const.})$  とした例である。

$|\theta_1 - \theta_0| (= \theta_D: \text{操作角})$  は, 一波面を  $r_0$  から  $r_1$  に移動するのに必要な重畳パターンの回転量で, 操作の容易さとモアレの見やすさを決める一要素である。簡単な実験によって, 図(a)の  $\theta_D$  は約  $\pi/12$  と定めた。尚,  $n = -2 \sim 2$  の範囲では,  $\theta_D = \pi/16 \sim 2\pi/3$  程度

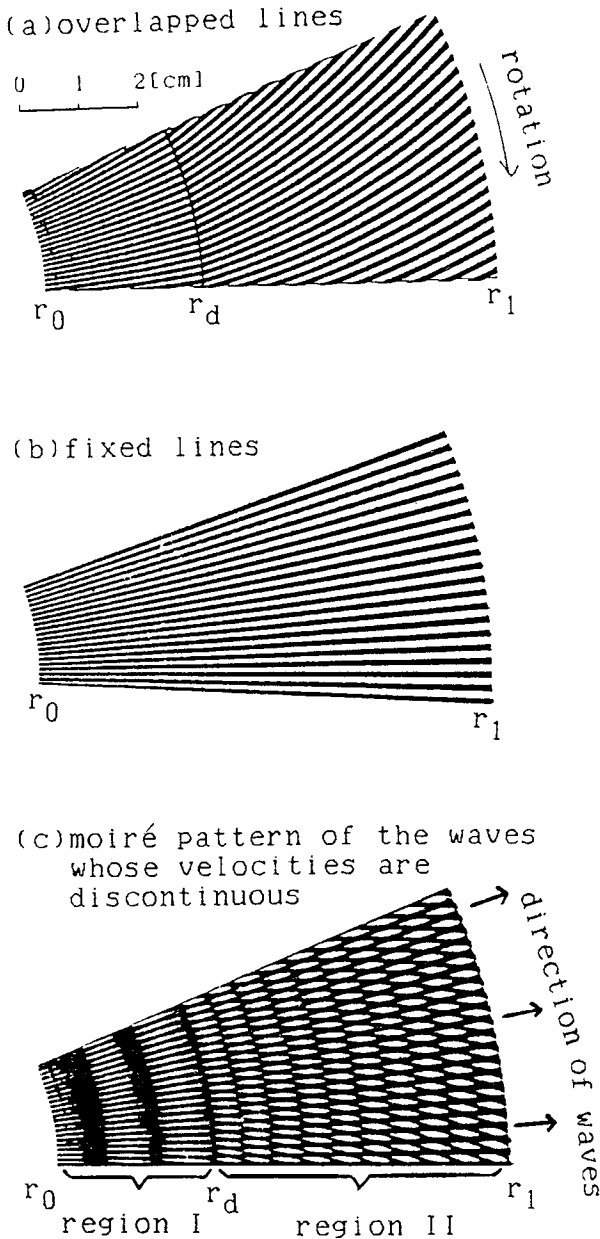


図2 同心円状進行波

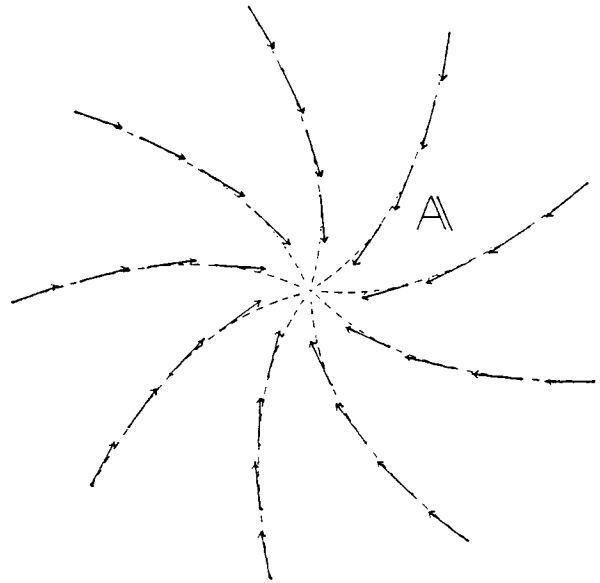
Fig. 2 Demonstration of centrifugal spherical waves.

が適当との結論を得ている。

### 3. 反転モアレを用いたらせん状流体モデル

ベクトル解析では、各種の流体モデルが教材として用いられる。特に、一点から直線状かつ放射状に移動する流体<sup>(8)</sup>やらせん状に移動する流体のモデルは、“発散”にかかわるものとしてとりあげられる。

本章では、図3に示したらせん状流体モデルに関して、これをシミュレーションする固定パターンと重畳

図3 流体モデル(パークレイのモデルを翻案したもの)  
 $|A| = \text{const.}$ Fig. 3 A fluid model (adapted from Berkley's model)  $|A| = \text{const.}$ 

パターンの設計を行う。さて、このシミュレーションでは、反転モアレの技法を用いる。ここに反転モアレとは、極細のペンで2種類の線群を描いたあと、いずれも描写部分を透明に、その他の部分を黒に反転して、これらを重畳させたときの模様を意味する。つまり、2枚のパターンを重ねると線が交叉した部分を光が透過し、これが一つの微粒子を表現する。全体としては微粒子群になるわけで、模擬的に流体を表現することになる。流体の進行方向を規定するらせんの形状は、適当な関数で固定パターン上に描けばよく、ここでは次の式(9)で与えた(後の図5(b)参照)。

$$r_f(\theta_f) = l\theta_f \quad (l: \text{const.}) \quad (9)$$

以下に、重畳パターンの設計法を述べる。いま、一固定線  $r_f(\theta_f)$  と一重畳線  $r(\theta)$  が図4のように点  $P$  で交叉しているものとし、その後、 $r(\theta)$  を図示のように時計方向に  $\angle\theta_0$  だけ回転させたとする。すると、 $r(\theta)$  上の  $P$  の位置は  $R$  に移動し、交点は  $P'$  にする。ここで、交点の  $r$  座標を  $r_p$  とすると、その移動量  $\Delta r_p$  は、 $\Delta r_p = P'Q$  となる。

一方、 $r_f(\theta_f)$  に関して、 $\angle\theta_f = \angle POQ$  とすると、それに対する  $\Delta r_f$  は、 $\Delta r_f = P'Q$  となる。 $r(\theta)$  についても同様で、 $\angle\theta = \angle ROQ$  に対して  $\Delta r = P'Q$  となる。したがって、 $\Delta r = \Delta r_f = \Delta r_p$  となる。

また、図4より次式が成り立つ。

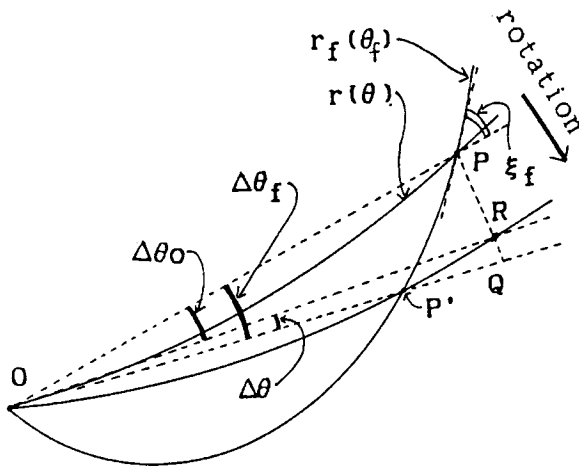


図4 交点の移動

Fig. 4 Moving of an intersection.

$$\Delta\theta_0 = \Delta\theta_f - \Delta\theta \quad (10)$$

これより,

$$\frac{d\tau_p}{d\theta_0} = \frac{1}{\frac{d\theta_f}{d\tau_f} - \frac{d\theta}{d\tau}} \quad (11)$$

となる。式(11)は重畳パターンの回転に対する、 $r$ と $r_f$ の交点と原点 $O$ との距離の変化率を示している。

次に、図3のらせん状流体で、その1本の流線を図4の $r_f(\theta_f)$ 上に微粒子の動きとして再現させることを想定すると、図3で $|A| = \text{const.}$ であることは、図4で一微粒子としての $r(\theta)$ と $r_f(\theta_f)$ の交点が、重畳パターンの等速回転と共に等速度で $r_f(\theta_f)$ 上を移動することにほかならない。固定線 $r_f$ 上の点 $P$ における微粒子の速度 $v$ は、 $r_f(\theta_f)$ の接線と $\overline{OP}$ とのなす角度を $\xi_f$ として、

$$v(=|A|) \simeq \frac{d\tau_p}{d\theta_0} \cdot \frac{1}{\cos \xi_f} \quad (12)$$

と表現できるので、式(12)=const.( $\equiv r^{-1}$ )とし、これに式(11)を代入すると、

$$\cos \xi_f \left( \frac{d\theta_f}{d\tau_f} - \frac{d\theta}{d\tau} \right) \simeq r \quad (13)$$

となる。また、式(9)から

$$\frac{d\tau_f}{d\theta_f} = l \left( = \frac{d\tau_f}{d\theta_f} \right) \quad (14)$$

となり、さらに、

$$\tan \xi_f = \frac{r}{(d\tau_f/d\theta_f)} = r \left( \frac{d\theta_f}{d\tau_f} \right) = r/l \quad (15)$$

であるから、式(13)、(15)の式より式(16)を得る。

$$\frac{d\theta}{d\tau} \simeq \frac{1}{l} - r \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}} \quad (16)$$

ここで $d\theta \rightarrow d\theta$ 、 $d\tau \rightarrow d\tau$ として、結局

$$\theta = \int d\theta = \int \left( \frac{1}{l} - r \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}} \right) d\tau \quad (17)$$

となる。そして、右辺の第2項に対して置換積分を行って次式を得る。

$$\theta = \frac{r}{l} + \frac{rl}{4} \left( -\frac{1}{2\omega^2} + 2 \log |\omega| + \frac{1}{2} \omega^2 \right) + \text{const.} \quad (18)$$

ここに、

$$\omega = -\frac{r}{l} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}} \quad (19)$$

である。

以上のことから、 $l$ と $r$ を定めれば、式(9)、(18)からそれぞれ固定線と重畳線が定まる(尚、式(18)でconst.=0としても一般性を失わない)。ここで、 $l$ は微粒子の移動方向にかかわるパラメータであり、一方 $r$ は、この値を0に近づけると、重畳線を原点を中心に回転したときの微粒子の速度がより大きくなる。

次に、固定パターンと重畳パターンは、原点を定めたのちに、それぞれ一定の角度(以後、ピッチと呼ぶ)ごとに式(9)、式(18)を描写すればよい。ここで、固定パターンのピッチ $s_f$ (rad)と重畳パターンのピッチ $s$ (rad)に関して、それぞれ $m_f s_f = 2\pi$ 、 $ms = 2\pi$ が成り立つ。ここに、 $m_f$ 、 $m$ はそれぞれ、固定線、重畳線の総数である。

さて、本研究で制作した重畳パターンと固定パターンの一部およびそれらを重畳したときの微粒子群の様子を、それぞれ図5(a)、(b)、(c)に示す、尚、 $l$ 、 $r$ 、 $m_f$ 、 $m$ の各パラメータは、反転モアレを実際にスクリーン上に提示して微粒子群の見やすさなどに基づいて定めた。図5の例では、 $l = 12 / (\pi/4)$ (cm)、 $r = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ 、 $m_f = 20$ 、 $m = 100$ としている。

#### 4 一対の点電荷が呈する電気力線

一対の点電荷や線電荷が呈する電気力線に関して、それぞれの形状は、やはり電磁気学での学習課題として重要である。Osterら<sup>(7)</sup>は、均一なピッチの放射状パターンを2枚用意し、中心を多少ずらして重ねると、モアレとして、双方の中心を通る円が多数発生することを示している。さらに、これは、互いに平行でそれぞれ正負にかつ等密度に帯電した線電荷が呈するfieldに合致する<sup>(9)</sup>。これに対して本章では、放射状パター

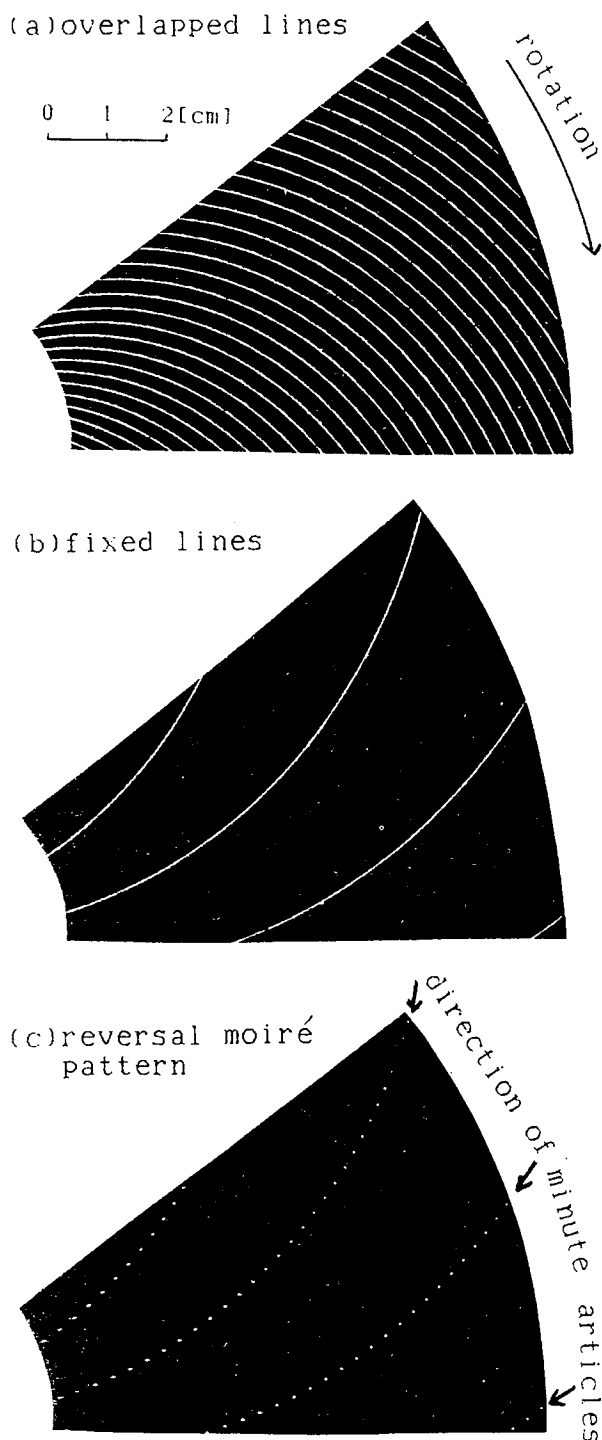
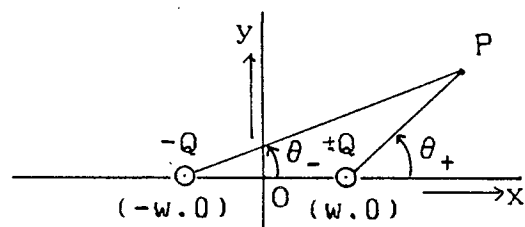


図5 反転モアレによるらせん状流体モデル ( $|A| = \text{const.}$ )  
Fig. 5 Demonstration of a fluid model by reversal moiré. Flow is spirally centrifugal and  $|A| = \text{const.}$

ンのピッチに適当な不均一さを持たせることにより、  
一対の点電荷による電気力線を表現する手法を述べる。  
いま、図6(a)に示すような  $2w$  の距離をへだてた一  
対の点電荷で、 $+Q$  の電荷のみを考える。立体角を  $\Omega$

(a) a dipole



(b) cubic angle

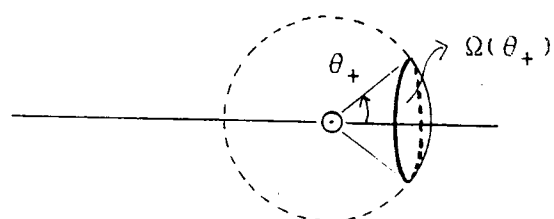


図6 一対の点電荷と立体角  
Fig. 6 A dipole and cubic angle.

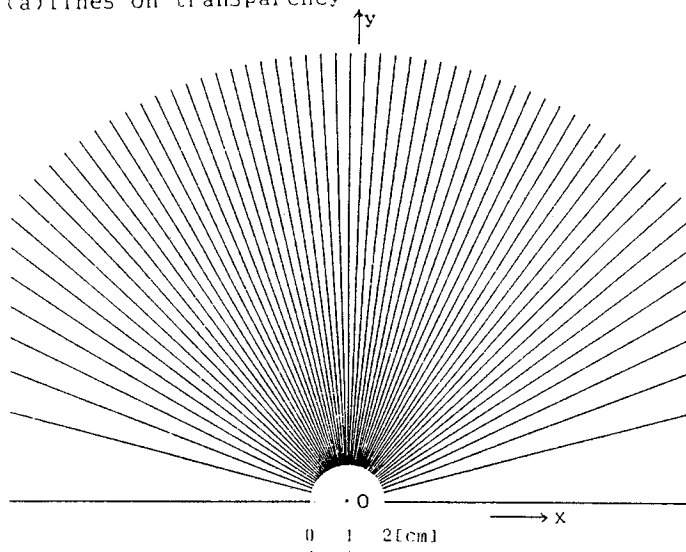
で表わすと、 $\Omega(\theta_+)$ は図(b)に示すようになり、

$$\Omega(\theta_+) = 1 - \cos \theta_+ \quad (20)$$

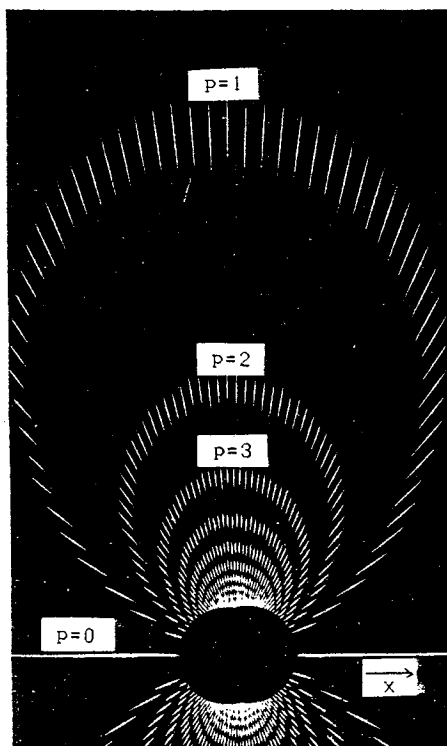
と計算される。一方、 $0 \leq \theta_+ < \theta_0$  内の電気力線の総  
本数  $N$  は、 $\Omega(\theta_0)$  に比例する。したがって、放射状の  
直線群の線密度を  $d\Omega/d\theta_+ (= \sin \theta_+)$  に比例させるよ  
うにすれば、 $0 \leq \theta_+ < \theta_0$  の直線の本数  $n$  は、 $N$  にほぼ  
比例することになる。図7(a)にその放射状パターンの  
例を示す。その反転パターンを2枚制作し、中心を  $x$   
方向に多少ずらして重ね合わせると、図(b)に示す反転  
モアレが得られる。ここでは、モアレパターンの見や  
すみの点からあえて反転モアレを用いており、また  $\theta_0$   
 $= \pi$  のときの  $n$  を60としている(通常モアレでは、  
図(c)のようになる)。

次に、直線群で構成された2枚のパターンを重畳さ  
せたときのモアレについて考察してみる。このとき、  
それぞれの直線群を  $x-y$  座標で、 $F(x, y) = \Psi(h)$ 、  
 $G(x, y) = \Phi(k)$  で表記すると、適当な関数  $\Theta(h, k)$   
に対して、 $\Theta(h, k) = p$  を満足する<sup>(7)</sup>。ここに、 $h$  と  
 $k$  は、それぞれの直線群の中で、個々の直線を同定す  
る整数値である。図7(c)の例では、角度の小さい直線  
から順に、 $0, 1, \dots$  と番号を付している。一方  $p$  は、  
モアレとして発生した曲線群において、個々の曲線  
(または直線)を同定するもので、やはり整数値であ  
る(図7(b)参照)。さて、図(b)のモアレでは、図(c)の  
 $h, k$  の数値例から明らかなように

(a) lines on transparency



(b) reversal moiré pattern



$$\theta(h, k) = h - k \quad (21)$$

が成り立つ。そして式(21)=const. が表わす曲線は、電気力線が互いに交叉しないという基本的性質を考えると、電気力線そのものを表わしていることになる。このことは、以下に示す解析でも明らかである。

双方の放射状パターンを中心の座標を  $(w, 0)$ ,  $(-w, 0)$  とし、式(20)に半角定理を適用すると、2枚

(c) moiré pattern  
 $\theta(h, k) = h - k$

note: In the Figure, "w" is set to be about 0.17[cm].

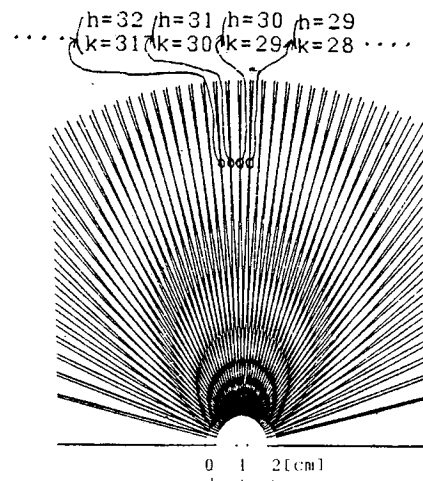


図7 双極子による電気力線の演示  
Fig. 7 Demonstration of electric lines of force.

のパターンの直線群は、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} y &= (x - w) \tan(2 \sin^{-1} \sqrt{h/n}) \\ y &= (x + w) \tan(2 \sin^{-1} \sqrt{k/n}) \\ h, k &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

これより、

$$\begin{aligned} \cos \theta_+ - \cos \theta_- &\equiv \frac{x - w}{\sqrt{(x - w)^2 + y^2}} - \frac{x + w}{\sqrt{(x + w)^2 + y^2}} \\ &= -\frac{2(h - k)}{n} = -\frac{2p}{n} \quad (23) \end{aligned}$$

と計算され、式(23)=const. は正負にかつ等量に帯電した一対の点電荷が呈する電気力線の方程式に一致する。

## 5. 考 察

同心円状進行波では、二つの媒質中の伝搬速度を式(2)で与えている。  $n = 0$  が基本的なモデルと考えられるが、  $n > 0$  や  $n < 0$  のモデルは伝搬定数の変化・相違にかかわる教材として使えそうである。次に、同心円状進行波と流体モデルのいずれにも共通するか、(OHP)上でモアレ用のパターンを操作する場合、「2枚のパターンの中心の位置固定」、「固定パターンの(OHP)ステージへの固定」および「重ねパターンの回転」という三つの作業を同時に必要とし、一人でのこの操作がやや難しく感じられる。そこで、(OHP)ステージ大の透明板を1枚用意してその中央付近に両ひょうを

接着したのち、2枚のパターンの中心をそれに差しこむなどすれば、その操作が容易になると思われる。

補足事項であるが、波動に関するモアレでは、OHPスクリーン上にそのパターンを必ずしも鮮明に映し出す必要はない。簡単な実験によって、スクリーンとOHPのほぼ中央に焦点を合わせる程度にぼかすのが適切との結論を得ている。

次に、一対の点電荷の呈する電気力線の形状に関し、線電荷におけるその形状との比較を容易にするのには、次の方法が適切である。すなわち、パターン上で  $0 \leq \theta < \pi$  には均一なピッチの放射状直線を反転したものを描き、 $\pi \leq \theta < 2\pi$  には図7(a)を反転したものを描きおく。そののち、これら2枚重畳すれば、点電荷と線電荷の双方のfieldを一度にOHP表示できる。

ところで、前章で述べた双極子での放射状パターンの制作手続きからすれば、2枚のパターン内の直線の総本数の比をたとえば1:2とすれば、一対の電荷量が  $-Q$  と  $2Q$  (または  $-2Q$  と  $Q$ ) の場合の電気力線を示すことになる。しかし実際には、不要なモアレが発生するなどのために実用性がないとの結論を得ている。このように電荷量の相違と電気力線との関係が指導の主目的である場合は、やはりコンピュータグラフィックスによる方が適切と思われる。

その他、図7(b)は、双極子からy方向に離れると電気力線の密度が減少するという定性的性質もよく表わしている。実は、図示のその密度は実際のものとは厳密には一致しないのであるが、電気力線の形状を問題にする電磁気指導での使用には、耐えられるものと思われる。

## 6. む す び

本論文では、モアレという技法を用いて、いくつかの物理系のOHP教具を開発した。そこでは、同心円状進行波、ベクトル解析に関する流体モデルおよび双極子の呈する電気力線の三つをとりあげて、モアレを発生させるためのパターンの設計法を論じた。今後は、その有効性の調査を行うと共に実際の授業の中でこれらをどのように利用してゆくかなど、利用技術の面からも検討を行いたい。

## 文 献

- (1) 松林 勉：“モアレ稿の波動への応用(II)－屈折”，物理教育，27,1, pp.39-45(1979)。
- (2) 永正，末武，清水：“OHPで演示するモアレの波動教材”，信学技報，ET78-267(1979)。
- (3) 北垣郁雄：“モアレ・反転モアレによる同心円状進

行波・微粒子群の演示のための簡易OHP教具”，昭59信学総全大，2803。

- (4) 松林，北原：“モアレ稿による円形波”，物理教育，30,1, pp.25-29(1982)。
- (5) Berkley (飯田監訳)：“物理学コース2”，p.90，コロナ社(1970)。
- (6) 北垣，末武：“学習者にコメントをフィードバックする成績評価システムの電気磁気学への適用”，日本教員雑誌，3,3, pp.115-123(1978)。
- (7) Oster, et al.：“Theoretical Interpretation of Moiré Patterns”，J.O.S.A.54,2, pp.169-175(1964)。
- (8) 北垣郁雄：“モアレ・反転モアレを用いた電磁気用簡易OHP教具の開発”，日本科学教育学会第8回年会，p.336-337(1984)。
- (9) 北垣郁雄：“モアレ・反転モアレによる同心円状進行波・微粒子群の演示のための簡易OHP教具とその評価”，信学論(A)，J68-A,1, pp.1-8(昭60-01)。

## 付 録

重畳線  $r(\theta)$  について、 $r=r_0$  のとき  $\theta=\theta_0$ ， $r=r_1$  のとき  $\theta=\theta_1$  とする。このとき、波動の伝搬速度を式(2)で与えるものとする、 $r(\theta)$  は次式となる。

$n \neq 1$  のとき

$$r = (D\theta + E)^{\frac{1}{-n+1}} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

ここに、

$$D = \frac{r_1^{-n+1} - r_0^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0}, \quad E = \frac{\theta_1 r_0^{-n+1} - \theta_0 r_1^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

$n = 1$  のとき

$$r = F \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{\theta}{\theta_1 - \theta_0}} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

ここに、

$$F = \exp \{ (\theta_1 \log r_0 - \theta_0 \log r_1) / (\theta_1 - \theta_0) \} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

(昭和60年9月17日受付，11月1日再受付)



## Development of Several OHP Equipment of Physics Using Moiré Patterns

Ikuo Kitagaki

Research and Development Institute of Vocational Training, Employment Promotion  
Corporation, Sagami-hara-City, Japan 229

### SUMMARY

This paper reports on several simple OHP equipments for education using Moiré patterns. The first equipment is concerned with centrifugal waves. The Moiré pattern is produced by superposing two specified patterns composed of straight lines and curves. The two patterns are determined as functions of the wave propagation velocity. The second is the fluid model used in demonstrating such notions in vector analysis as divergence. The spiral travelling wave is simulated using the reverse Moiré, which is a counterpart of the Moiré technique. The third is the equipment to simulate the electric lines of force produced by a pair of point charges and is used in teaching electromagnetics. The patterns are designed also for easy understanding of Moiré phenomena. This paper describes the design procedures for the patterns, indicating several points to be noted in the actual application of the equipments.

### 1. Introduction

A Moiré pattern is produced by superposing two kinds of patterns composed of a number of straight lines and curves. The phenomenon is utilized in high-accuracy geometrical measurements and OHP equipments for education in physics. In the latter application, wave propagation phenomena such as longitudinal waves and plane waves can easily be simulated. Such presentation encourages student interest in geometrical aspects, serving as a simple means to enhance their motivation.

In teaching wave propagation, it is important not only to treat the wave propagation in a simple medium, but also to examine the change of propagation direction and speed at discontinuities of the medium, such

as in diffraction of light. There are already reports on the simulation of those phenomena utilizing Moiré patterns [1, 2].

With the widespread use of personal computers, on the right hand, dynamical physical phenomena are now easily simulated and many interesting problems are posed for physics teachers. In the utilization of Moiré patterns, the OHP equipment, which is a common equipment in science education, can be directly applied and can be one of the most useful media in physics education.

From such a viewpoint, the author has reported on several OHP equipments for education, such as those for radially travelling waves and a fluid model for vector analysis [3, 8]. The basic models for each of the phenomena have already been discussed. This paper reports on the development of a model which can be paired with the basic models for classroom demonstration. The following three topics are considered.

The first is the model for centrifugal waves, wherein the propagation velocity may change discontinuously on concentric circles. Special patterns are designed to produce such Moirés by superposing and shifting two patterns [4]. In this study, however, a rotational scheme is employed from the viewpoint of ease of operation and a formulation is given for the patterns.

The second topic is the fluid model for the vector analysis, which is useful in understanding the basic concepts [6]. By employing the reverse Moiré, radial and straight flow of fluid from the center can be demonstrated [3]. In this paper, a spiral model, which is often discussed in contrast to the radial flow, is developed. This is based on Berkeley's model [5].

The third topic is the static model, which is a demonstration of the electric

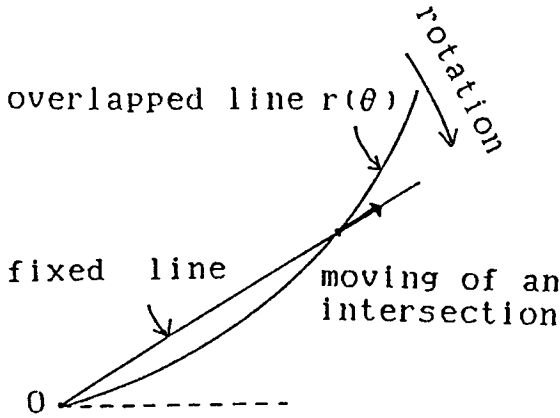


Fig. 1. Moving of an intersection.

lines of force generated by a dipole. The configuration of the electric lines of force from a dipole is one of the important items of study in electromagnetics. This paper discusses the design methods for the patterns to be used in generation of the Moiré patterns.

## 2. Centrifugal Waves

This section presents the design for the Moiré pattern simulating centrifugal waves. In generation of the Moiré pattern, one of the patterns is fixed on the OHP (called the fixed pattern) and the other is superposed on the fixed pattern (called the overlapping pattern). Then the overlapping pattern is shifted to simulate wave motion. In this case, the "shift" implies "rotation."

In the following, a model is considered where the propagation velocity may be discontinuous on a concentric circle. The circle of discontinuity is restricted to one. The case of two or more discontinuities can be handled inductively owing to the restriction of the size of the OHP stage.

In this problem, the wavefront is always circular whichever way the overlapping pattern is rotated. The set of lines in the fixed pattern (fixed set of lines) and the set of lines in the overlapping pattern (superposed set of lines) must be sets of radial lines with equal spacing. Since the Moiré pattern is determined only by the relative locations of those radial patterns, the fixed lines are designed for simplicity as straight lines.

The fixed pattern and the overlapping pattern are superposed so that the centers of their radial lines (denoted by 0) coincide. Then, with rotation of the overlapping pattern, the intersection of the fixed and overlapping set of lines moves away from the

center, as is shown in Fig. 1. Viewed as a whole, this motion of the intersection represents the propagation of the centrifugal wave, as shown later in Fig. 2(c). Assume that the overlapping pattern is rotated at uniform speed. Let the propagation velocity of the wave be  $v$  and represent an overlapping line by the polar coordinate  $r(\theta)$ . Then the following relation is obtained from Fig. 1:

$$v = A dr/d\theta \quad (A: \text{const.}) \quad (1)$$

The initial setting for  $v$  is given by

$$v = B r^n \quad (B: \text{const.}) \quad \text{i.e., } dr/d\theta = C r^n \quad (C \equiv B/A) \quad (2)$$

where  $n$  is an integer. For educational purposes, five values of  $n$  ( $= -2$  -  $2$ ) will be sufficient.

Let medium I be in the range  $r_0 \leq r < r_d$  and let medium II be in the range  $r_d \leq r < r_1$ . The variables and constants in media I and II are discriminated by the corresponding subscripts. The values of  $\theta$  for  $r_0$ ,  $r_d$  and  $r_1$  are denoted by  $\theta_0$ ,  $\theta_d$  and  $\theta_1$ , respectively. It is assumed that the propagation velocity of the wave is multiplied by  $\mu$  in passing through the circle  $r = r_d$ . Solving Eq. (2) under this boundary condition [8] (Appendix) to determine the overlapping line  $r(\theta)$ , the following equation is obtained:

1) When  $n_I \neq 1$ ,  $n_{II} \neq 1$ ,

$$r = \begin{cases} \left\{ r_0^{-n_I+1} + \frac{(r_d^{-n_I+1} - r_0^{-n_I+1})\theta}{\theta_d - \theta_0} \right\}^{\frac{1}{-n_I+1}} & r_0 \leq r < r_d \\ \left\{ r_d^{-n_I+1} + \mu K_1 (\theta - \theta_d) \right\}^{\frac{1}{-n_I+1}} & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (3)$$

where

$$K_1 = \frac{r_d^{-n_I+1} - r_0^{-n_I+1}}{(-n_I+1)(\theta_d - \theta_0)} \quad (4)$$

2) When  $n_I \neq 1$ ,  $n_{II} = 1$ ,

$$r = \begin{cases} 1), & r_0 \leq r < r_d \\ r_d \exp \{ \mu K_1 r_0^{n_I-1} (\theta - \theta_d) \}, & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (5)$$

3) When  $n_I = 1$ ,  $n_{II} \neq 1$ ,

$$r = \begin{cases} \frac{\theta_d}{\theta_d - \theta_0} \cdot r_d \frac{\theta_0}{\theta_d - \theta_0} (r_d/r_0) \frac{\theta}{\theta_d - \theta_0} & r_0 \leq r < r_d \\ \{r_d^{-n_I+1} + \mu K_2(\theta_d - \theta_d)\}^{-\frac{1}{-n_I+1}} & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (6)$$

where

$$K_2 = \{\log(r_d/r_0)\}/(\theta_d - \theta_0) \quad (7)$$

4) When  $n_I = n_{II} = 1$ ,

$$r = \begin{cases} \text{same as 3)} & r_0 \leq r < r_d \\ r_d \exp\{\mu K_2(\theta - \theta_d)\} & r_d \leq r < r_1 \end{cases} \quad (8)$$

The most general case will be  $n_I = n_{II} = 0$ . The overlapping and fixed patterns for this case are shown in Parts (a) and (b) of Fig. 2, respectively. Part (c) is the Moiré pattern when they are superposed. It is set in this example that  $\mu = 0.5$ , i.e.,  $v_I = 2v_{II}$  (= const.).

$|\theta_1 - \theta_0|$  ( $\equiv \theta_D$ : operating angle) is the rotation of the overlapping pattern required to shift the wavefront from  $r_0$  to  $r_1$ , which is a measure of the ease of operation and visibility of the Moiré pattern. In this study,  $\theta_D$  of Fig. 2(a) was set by simple experiment as approximately  $\pi/12$ . For the range of  $n = -2 \sim 2$  it is appropriate to set  $\theta_D = \pi/16 \sim 2\pi/3$ .

### 3. Spiral Fluid Model Using Reverse Moiré Pattern

Various kinds of fluid models are used in teaching vector analysis. Especially, the fluid model of straight and radial flow from a point [8] and the spiral flow are used as models for divergence. This section considers the spiral fluid model shown in Fig. 3 and a design method is presented for the fixed and overlapping patterns simulating the flow.

The reverse Moiré used in this simulation is based on the following technique. Two kinds of lines are drawn using an extra thin pen. Parts of the lines are made transparent and the other parts are black. Two patterns are thus constructed in the reversal and then are superposed. At the intersection of the lines of the two patterns the light is passed representing a particle. A set of fine particles is thus represented as a whole

and the movement of the particles represents the flow of the fluid. The spiral determining the flow of the fluid can be preset on the fixed pattern, and is given by the following equation (see Fig. 5(b)):

$$r_f(\theta_f) = l\theta_f \quad (l: \text{const.}) \quad (9)$$

The overlapping pattern is designed as follows. Assume that a fixed line  $r_f(\theta_f)$  and an overlapping line  $r(\theta)$  intersect at point  $P$ , as in Fig. 4. Then assume that  $r(\theta)$  is rotated by the clockwise angle  $\Delta\theta_0$  as shown in the figure.  $P$  on  $r(\theta)$  is moved to  $R$  and the intersection is  $P'$ . Letting the  $r$  coordinate of the intersection be  $r_p$ , the shift  $\Delta r_p$  is given by  $\Delta r_p = \overline{P'Q}$ .

For  $r_f(\theta_f)$ , let  $\Delta\theta_f = \angle POQ$ . Then the corresponding  $\Delta r_f$  is given by  $\Delta r_f = \overline{P'Q}$ . The same relation applies to  $r(\theta)$ .  $\Delta r = \overline{P'Q}$  holds for  $\Delta\theta = \angle ROQ$ . Consequently,  $\Delta r = \Delta r_f = \Delta r_p$ .

It follows from Fig. 4 that

$$\Delta\theta_0 = \Delta\theta_f - \Delta\theta \quad (10)$$

Consequently,

$$\frac{\Delta r_p}{\Delta\theta_0} = \frac{1}{\frac{\Delta\theta_f}{\Delta r_f} - \frac{\Delta\theta}{\Delta r}} \quad (11)$$

Equation (11) represents the rate of change in distance to the intersection of  $r$  and  $r_f$  from the origin, corresponding to the rotation of the overlapping pattern.

Consider the situation concerning the spiral fluid of Fig. 3, where one of the lines is to be represented on  $r_f(\theta_f)$  of Fig. 4 as movement of a particle. Since  $|A| = \text{const}$  in Fig. 3, the intersection of  $r(\theta)$  and  $r_f(\theta_f)$  as a particle should move with a constant speed on  $r_f(\theta_f)$  with rotation of the overlapping pattern. Letting the angle between the tangent of  $r_f(\theta_f)$  and  $\overline{OP}$  be  $\xi_f$ , the velocity  $v$  of the particle at  $P$  on the fixed line  $r_f$  can be represented as

$$v(=|A|) \simeq \frac{\Delta r_p}{\Delta\theta_0} \cdot \frac{1}{\cos \xi_f} \quad (12)$$

Letting the value of Eq. (12) be const. ( $\equiv \gamma^{-1}$ ) and substituting it into Eq. (11),

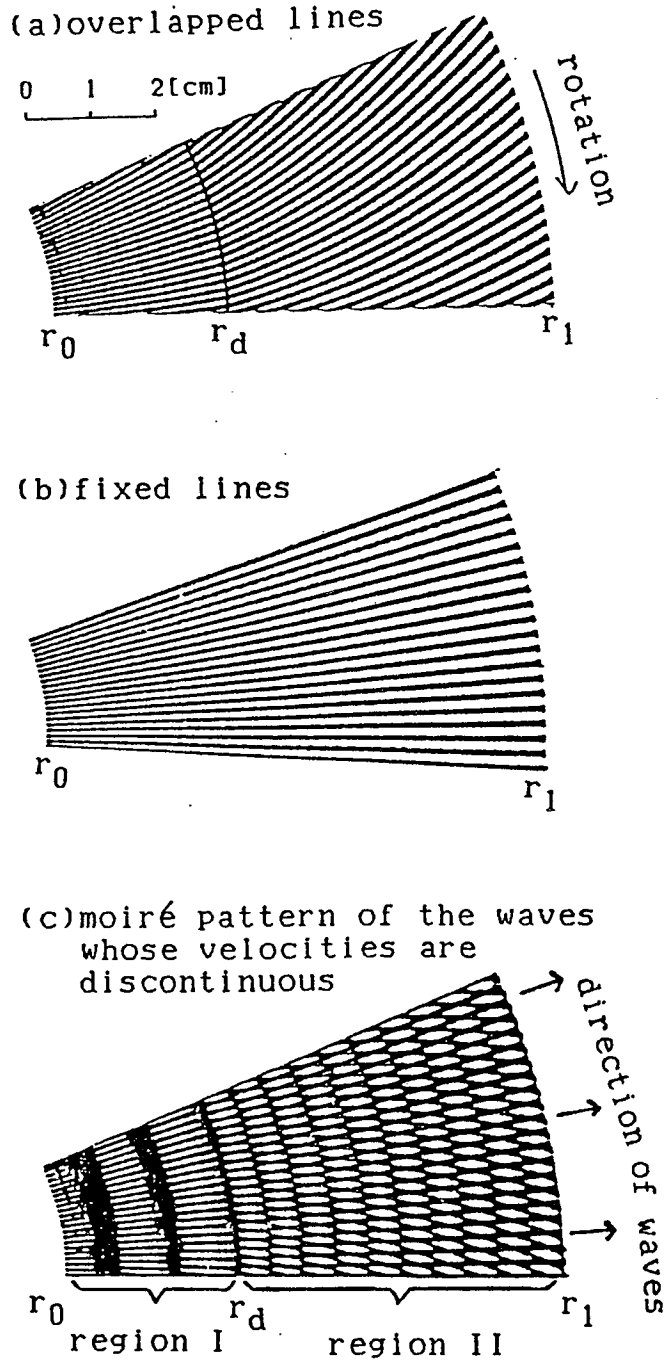


Fig. 2. Demonstration of centrifugal spherical waves.

$$\cos \xi_f \left( \frac{d\theta_f}{d\tau_f} - \frac{d\theta}{d\tau} \right) \approx r \quad (13)$$

It follows from Eq. (9) that

$$\frac{d\tau_f}{d\theta_f} = l \left( = \frac{d\tau_f}{d\theta_f} \right) \quad (14)$$

Since

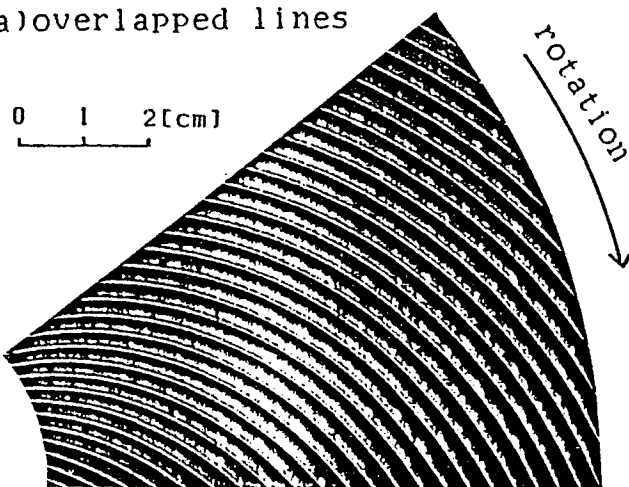
$$\tan \xi_f = \frac{r}{(d\tau_f/d\theta_f)} = r \left( \frac{d\theta_f}{d\tau_f} \right) = r/l \quad (15)$$

from Eqs. (13) and (15) we obtain

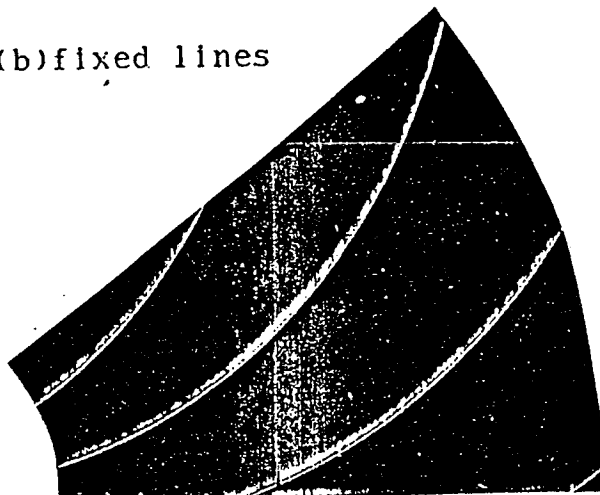
$$\frac{d\theta}{d\tau} \approx \frac{1}{l} - r \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}} \quad (16)$$



(a) overlapped lines



(b) fixed lines



(c) reversal moiré pattern

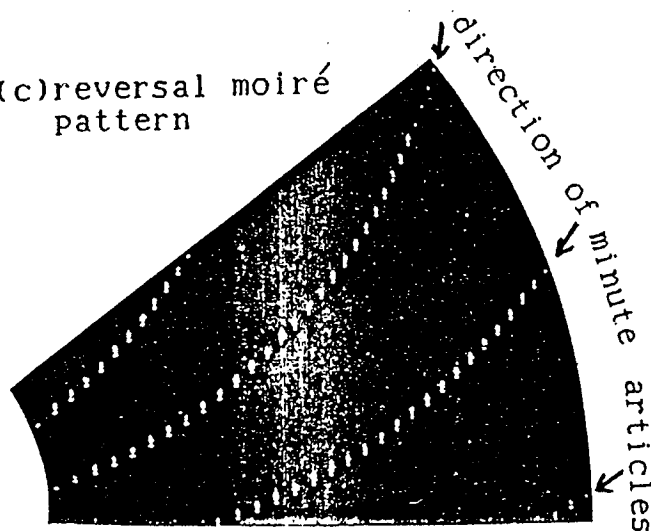
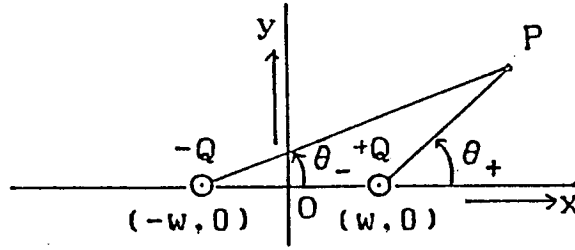


Fig. 5. Demonstration of a fluid model by reversal Moiré.  
Flow is spirally centrifugal and  $|A| = \text{const.}$

(a) a dipole



(b) cubic angle

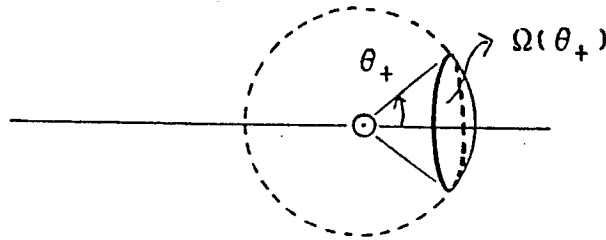


Fig. 6. A dipole and cubic angle.

of the particle.  $\gamma$  is a parameter such that the particle velocity, when the overlapping line is rotated around the origin, is increased by making  $\gamma$  approach 0.

The fixed and overlapping patterns are obtained as follows. By setting the origin, Eqs. (9) and (18) are plotted by rotating the overlapping pattern for a specified step (called pitch). Let the pitch of the fixed pattern be  $s_f(\text{rad})$  and that of the overlapping pattern be  $s(\text{rad})$ . Then  $m_f s_f = 2\pi$  and  $ms = 2\pi$  hold, where  $m_f$  and  $m$  are the numbers of fixed and overlapping lines.

Figure 5 shows the parts of fixed and overlapping patterns together with the behavior of the set of particles when the two patterns are superposed. The parameters  $l$ ,  $r$ ,  $m_f$  and  $m$  are determined based on ease of observation when the reverse Moiré pattern is actually projected on the screen. In this case, they are set as  $l = 12/(\pi/4)(\text{cm})$ ,  $\gamma = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ ,  $m_f = 20$  and  $m = 100$ .

#### 4. Electric Lines of Force by a Pair of Point Charges

The configuration of the electric lines of force produced by a pair of point or line charges is an important topic of study in electromagnetics. Oster et al. [7] showed

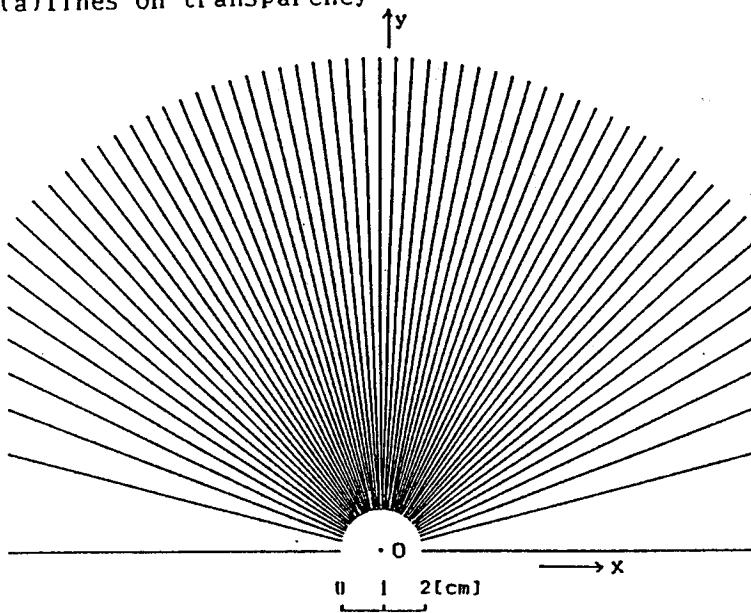
that by slightly eccentric superposition of two radial patterns with uniform pitch a number of circles are produced as a Moiré pattern passing through the two centers. The circles are the same as the electric lines of force in the field produced by two parallel lines with equal positive and negative charges [9]. This paper describes a method in which a suitable nonuniformity is provided in the pitch of the radial pattern and electric lines of force are produced by a pair of point charges.

Consider a pair of point charges with distance of  $2w$ , as shown in Fig. 6(a). Consider only the charge of  $+Q$ . Denoting the solid angle by  $\Omega$ ,  $\Omega(\theta_+)$ , seen from Fig. 6(b), is given as

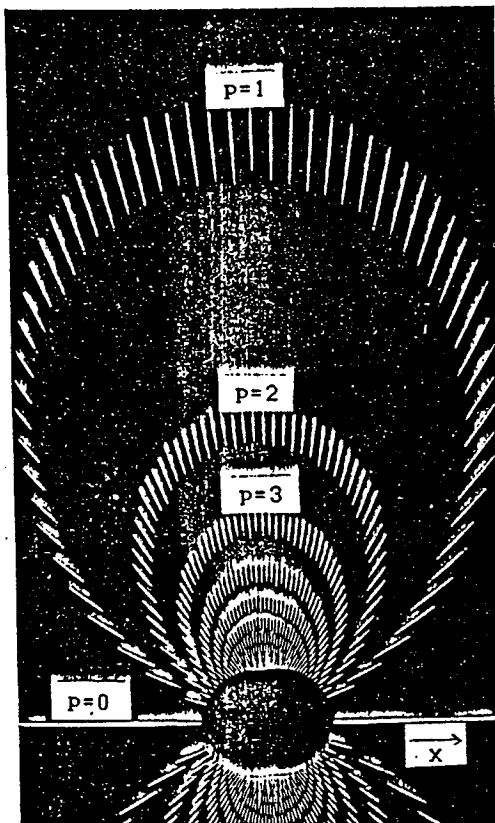
$$\Omega(\theta_+) = 1 - \cos \theta_+ \quad (20)$$

The total number  $N$  of electric lines of force in  $0 \leq \theta_+ < \theta_0$  is proportional to  $\Omega(\theta_0)$ . Consequently, preparing the radial pattern so that the density of the set of lines is proportional to  $d\Omega/d\theta_+ (= \sin \theta_+)$ , the number  $n$  of lines in  $0 \leq \theta_+ < \theta_0$  is proportional to  $N$ . Figure 7(a) is an example of such a radial pattern. Preparing two such reverse patterns and superposing them with centers shifted slightly along the  $x$  direction, the reversed Moiré pattern of (b) is obtained. The reverse Moiré is used for ease of observation. It is set that  $n = 60$

(a) lines on transparency



(b) reversal moiré pattern



(c) moiré pattern  
 $\Theta(h, k) = h - k$

note: In the Figure, "w" is set to be about 0.17[cm].

... (h=32, h=31, h=30, h=29  
 ... (k=31, k=30, k=29, k=28 ...

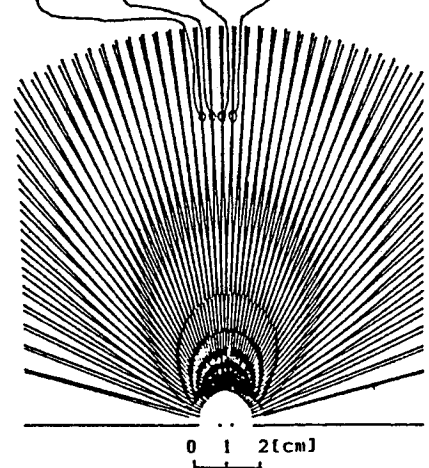


Fig. 7. Demonstration of electric lines of force.

for  $\theta_0 = \pi$  (if an ordinary Moiré pattern is used, it is as in (c)).

As the next step, consider the configuration when two patterns composed of sets of

straight lines are superposed. Let the sets of straight lines be represented by the  $x - y$  coordinates as  $F(x, y) = \Psi(h)$  and  $G(x, y) = \Phi(k)$ . Then the relation  $\Theta(h, k) = p$  is satisfied for a certain function  $\Theta(h, k)$  [7].  $h$  and  $k$  are integers specifying the individual



straight lines in the two sets. In the case of Fig. 7(c), the straight lines are numbered as 0, 1, ... from the smaller angle.  $p$  is the integer parameter specifying the individual curves (or straight lines) in the set of curves generated as a Moiré pattern (Fig. 7(b)).

It is seen from the examples of  $h$  and  $k$  in (c) that

$$\theta(h, k) = h - k \quad (21)$$

Considering the basic property that the electric lines of force do not intersect, it is seen that the curve represented by Eq. (21) = const. is exactly the electric line of force. This property is also seen from the following analysis.

Let the centers of the two radial patterns be  $(w, 0)$  and  $(-w, 0)$ . Applying the half-angle theorem to Eq. (20), the sets of straight lines in the two patterns are represented as follows:

$$\left. \begin{aligned} y &= (x - w) \tan(2 \sin^{-1} \sqrt{h/n}) \\ y &= (x + w) \tan(2 \sin^{-1} \sqrt{k/n}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$h, k = 0, 1, \dots, n-1$$

Consequently,

$$\cos \theta_+ - \cos \theta_- = \frac{x - w}{\sqrt{(x - w)^2 + y^2}} - \frac{x + w}{\sqrt{(x + w)^2 + y^2}}$$

$$= -\frac{2(h - k)}{n} = -\frac{2p}{n} \quad (23)$$

and the curve represented by Eq. (23) = const. is the same as the equation for the electric lines of force produced by a pair of equal positive and negative point charges.

## 5. Discussion

In representation of a centrifugal wave the propagation velocities in the two media are given by Eq. (2).  $n = 0$  gives the basic model, but the models for  $n > 0$  or  $n < 0$  can also be used as educational material for the change or difference of propagation constant. The following situation is common to the centrifugal wave and fluid model. The three operations of setting the centers of the two patterns, setting the fixed pattern on the OHP stage and the rotation of the overlapping pattern should be performed in parallel. Since it is rather difficult for one person to perform all of these operations, they can be simplified by the following elaboration. A transparent plate of the same size as the

OHP stage is prepared with a pin at the center. The two patterns have a hole at the center, through which the pin is inserted.

As an additional note, it is not necessary that the wave pattern of the Moiré be clearly projected on the OHP screen. It is seen to be more impressive if the pattern is slightly blurred by setting the focus in the middle of the OHP and the screen.

The following method is convenient in comparing the electric lines of force produced by a pair of point charges and those produced by a pair of line charges. For  $\theta < \pi$ , radial straight lines with uniform pitch are drawn in reverse pattern and for  $\pi \leq \theta < 2\pi$  Fig. 7(a) is drawn in the reverse pattern. By superposing these two sets of patterns, the fields of both the point and line charges can simultaneously be displayed by OHP.

In construction of the radial pattern from the dipole discussed in the previous section, if the total number of straight lines in the two patterns are set in the ratio of 1:2, the electric lines of force are for the case where the charges are  $-Q$  and  $2Q$  (or  $-2Q$  and  $Q$ ). This type of display, however, is not practical for such reasons as generation of unwanted Moiré patterns. If the relation between the varying charges and the electric lines of force is the object of study, the use of computer graphics will be more appropriate.

Figure 7(b) also well represents the quantitative tendency for the density of the electric lines of force to decrease with distance from the dipole along the  $y$  direction. The density of the displayed lines is not equal to the actual density, but it will still be useful in teaching electromagnetics when the configuration of the electric lines of force is the major concern.

## 6. Conclusions

This paper reported on the development of several OHP equipments for physics education using Moiré techniques. The three principal topics discussed were centrifugal waves, a fluid model for vector analysis and electric lines of force produced by a dipole. The design for the patterns to produce the desired Moiré patterns was discussed. Problems left for future study are to examine the usefulness of the equipments and their utilization in actual classrooms.

## REFERENCES

1. T. Matsubayashi. Application of Moiré patterns to waves (II)--diffraction,

- Phys. Education, 27, 1, pp. 39-45 (1979).
2. Nagamasa, Suetake and Shimizu. Educational materials by Moiré pattern produced by OHP, Papers of Technical Group on Educational Techniques, I.E.C.E., Japan, ET78-267 (1979).
  3. I. Kitagaki. Simplified OHP equipment for display of centrifugal waves and particles using Moiré and reverse Moiré patterns, Nat. Conv. Record of I.E.C.E., Japan, 2803 (1984).
  4. Matsubayashi and Kitahara. Circular waves produced by Moiré patterns, Phys. Education, 30, 1, pp. 25-29 (1982).
  5. Berkeley (Iida tr.). Course in Physics 2, p. 90, Corona Co. (1970).
  6. I. Kitagaki and Suetake. The application of a computerized evaluation system giving comments to learners to electromagnetics, Japan Jour. of Educ. Technol. 3, 3, pp. 115-123 (1978).
  7. Oster et al. Theoretical interpretation of Moiré patterns, J.O.S.A., 54, 2, pp. 169-175 (1964).
  8. I. Kitagaki. Development of simple OHP equipments for teaching electromagnetics using Moiré and reverse Moiré patterns, 8th Conv. Sci. Educ. Soc. Jap., p. 336-337 (1984).
  9. I. Kitagaki. Simple OHP equipments for the demonstration of centrifugal spherical waves/a group of minute particles using Moiré/reverse Moiré and their evaluation, Trans. (A), I.E.C.E., Japan, J68-A, 1, pp. 1-8 (Jan. 1985).

## APPENDIX

For the overlapped line  $r(\theta)$ , let  $\theta = \theta_0$  for  $r = r_0$  and  $\theta = \theta_1$  for  $r = r_1$ . Let the propagation speed of the wave be given by Eq. (2). Then  $r(\theta)$  is given as follows.

When  $n \neq 1$ ,

$$r = (D\theta + E)^{\frac{1}{-n+1}} \quad (\text{A1})$$

where

$$D = \frac{r_1^{-n+1} - r_0^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0}$$

$$E = \frac{\theta_1 r_0^{-n+1} - \theta_0 r_1^{-n+1}}{\theta_1 - \theta_0} \quad (\text{A2})$$

When  $n = 1$ ,

$$r = F \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{\theta}{\theta_1 - \theta_0}} \quad (\text{A3})$$

where

$$F = \exp \{ (\theta_1 \log r_0 - \theta_0 \log r_1) / (\theta_1 - \theta_0) \} \quad (\text{A4})$$