研究発表

工学者のための新しい数学教育の一提言

A proposal of renewed math education for engineering students and working engineers

職業能力開発総合大学校　専門基礎学科　**佐野　茂**

職業能力開発総合大学校　電気システム工学科　**見城　尚志**

概要：新しい工学教育のなかでの数学教育に非ユークリッド幾何学を取り入れる意義を提案する。学校および継続工学教育での数学の必要性として，役だつ数学は当然であるが，21世紀に人類が直面するだろうさまざまな課題に対して既知の知識や方法を超えるソリューションを創出することが期待される技術者には，厳格な無矛盾な論理思考の訓練が必要である。人類が古代ギリシャの思考から２千数百年を経て構築してきた数学の中に適切なツールがあるに違いない。この目的のために高校で学ぶ数学知識をもとに非ユークリッド幾何学を展開し特殊相対性理論までを統一的に扱うテキストを著した。

１．まえがき

今世紀に入って以前とは違った問題が世界におきている。経済の状況も昔の理論では説明できないし，新しい指導概念を求めているといえる。国内の課題としては現代日本の閉塞性を破るような新しい時代の工学を生み出す発想がほしい。

技術者は大学などの終了後には，行政の論理，利潤追求の論理，省エネルギーの論理（いかにして人類の環境を守りクリーンなエネルギーを確保すべきか），工学倫理の論理など，さまざまな論理に晒されながら仕事をする。技術者が経済や経営に参画することや議論に加わることも多々出てくる。そこで重要なのが，問題の本質を理解し，基本を定式化し，構造を明らかにしていく能力の育成である。それによって新しい発想を得て革新的なものやシステムを創出することである。そのためには，矛盾のない論理とはどんな論理なのかの事例を数学教育のなかにしっかり取り入れる必要がある。

数学教育に関していろいろの問題が議論されているが，最近の日本にみられる傾向としては，義務教育や高校の数学の時間が減っており，これは技術教育が重要な現代社会の要請に逆らうものである。若者に理系への魅力を感じさせるためには，数学論理の深遠さを感じさせる科目が必要である。筆者らは非ユークリッド幾何がこの目的に最適であると考える。

一方，宇宙探査や開発が新聞紙面の日常的な記事である時代では，相対性理論は理系人には必須の知識であるべきだが，工科系大学のカリキュラムには必ずしも盛り込まれていない。相対性理論と非ユークリッド幾何学との関連について，話題として取りざたされることは多いのだが，その関連性を平易な数学によって説明したテキストは皆無である。

このような状況のなかで，筆者らは新しい数学教育に一石，つまり１つの著作（非ユークリッド幾何と相対論）を投げかけようというものである。日本の出版界の大きな特徴としてサイエンスのペーパーバック・シリーズがいくつかあり，なかでもブルーバックスは大きな読者層をもっている。このシリーズにおいてすでに非ユークリッド幾何も相対性理論もある。相対性理論のブルーバックスは100万部を超えている。しかし，それは正確に数学記述として書かれたものではなく「お話」である。数式を避けた解説は向学心のある者にはかえって理解しにくく，ぼやらとしたものになってしまう。われわれの試み

はこのシリーズで数式を用いて正確に語るものである。

ここでは，日本語で書かれた本書の内容を紹介しながら，継続教育を含めて，工学教育における深遠な数学の意味を論じたい。

2．平行線の公理と非ユークリッド幾何

中学高校においてユークリッド平面幾何で，平行線の公理「直線に対し，その上にない点を通る平行線は１本のみ存在する」を学ぶ。これは第５公準とも呼ばれている公理である。この公理を他の公理から導く問題は紀元前より2000年以上にわたって多くの人々が挑戦してきた歴史的な問題である。この問題の解決はガウスやヤーノス・ボヤイ，ロバチェフスキーらが1820年ごろに与えている。これが有名な非ユークリッド幾何の発見である。彼らの論理は難解であったが，その後ポアンカレなどによってわかりやすい理論に整備された。

本書では次のような論理にまとめている。

⑴　線分とは２点間の最短線である。

⑵　この長さを保つ合同変換で不変な性質をあたえるのがユークリッド幾何である。

ユークリッド幾何の本質を整理し，上半複素平面に新たにポアンカレモデルと呼ばれている双曲幾何を構成する。

⑴　複比を用いて長さを新たに定義する。

⑵　実軸上に中心をもつ半円は，その上の任意の２点間はこの長さによる最短線をあたえることから直線とみなせる。

⑶　分数変換はこの長さを保つ（変えない）変換である。

この分数変換で不変な性質をあたえるのが双曲幾何である。３角形の合同定理などは同じように成立するが，平行線の公理を満足しない。その代わり直線に対し，その上にない点を通る平行線は無数に存在する。

さらにこの幾何の無矛盾性を示すために

⑷　ピタゴラスの定理，正弦定理，余弦定理

を証明した。

このようにして歴史的な問題は解決されたが，これを追体験してみるのは大変有意義である。そのことは：

⑴　常識にとらわれずに，本質を見抜き整理する。

⑵　基本となる内容を把握するし，概念の明確化をする。

⑶　無矛盾の論理により，考察する。

⑷　（物事の）本質的な構造を明らかにすることにより，問題解決に迫る。

などの能力の修得に有益である。

3．工学教育における虚数

虚数や複素数は工学および物理学において頻繁に使われる。例えば，交流回路の計算においては複素平面で電流，電圧，インピーダンスを複素数として扱うが，それは計算の便宜さのためである。物理学の典型としてはシュレディンガーの波動方程式に現れる電子などの存在確率波 Ψ がある。これも計算の便宜さあるいは数学的記述の便利さとして複素数を利用しているものだといえる。また，コーシー・リーマンの正則性の理論よりは，非ユークリッド幾何のほうが現代社会にとって意義深いと考える。しかも，予備知識としては高校の数学で十分である。

ポアンカレの分数変換は $z = x + iy$ に対して次式で定義される。

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (1)$$

（a, b, c, d は $ad-bc=1$ を満たす実数）

図１はポアンカレモデルにおける平行線を表す。この図の実軸上に中心をもつ半円はポアンカレモデルでの直線に相当し双曲直線と呼ばれている。ここで実軸は無限遠であり無限遠点Ａからもう１つの無限遠点Ａ′に引かれた双曲直線が l である。点Ｐは l の上にない点である。点Ｐを通って l に平行な（交わらない）双曲直線はいくつもあることを示すものである。

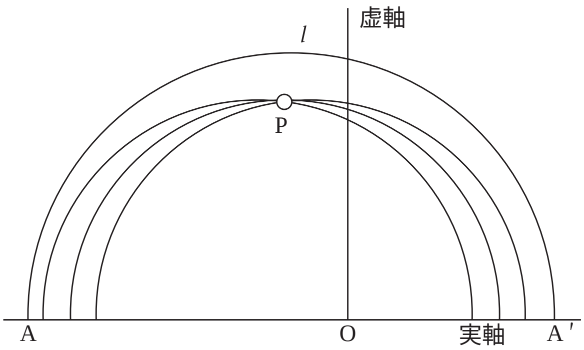


図１　直線 l その上にない点 P を通る複数の平行線（実軸上の点 A, A′は無限遠点）

４．ピタゴラスの定理と虚数 i による幾何構造の転移

虚数の重要性は，ピタゴラスの定理の考察によってさらに深められる。双曲幾何においては直角３角形のピタゴラスの定理は双曲線関数を使った次式になる。

$$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c \tag{2}$$

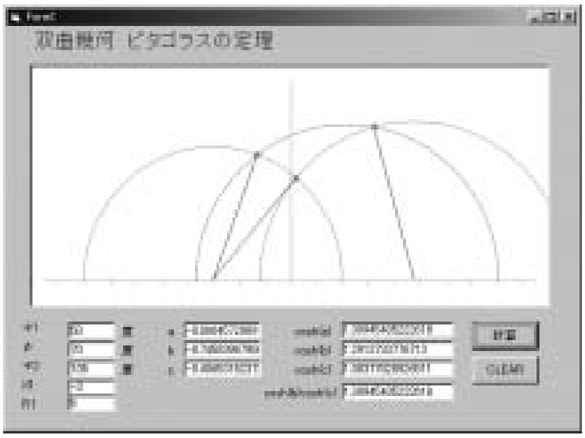
これをVisual Basicによって数値計算ソフトウェアを作成したのが図２である。

非ユークリッド幾何構造はこの他にも多数あるが，直感的にわかりやすい幾何として球面幾何がある。この球面幾何は双曲幾何と双対の関係にある。図３は球面上の直角３角形であり，この場合には余弦関数を使った次式がピタゴラスの定理になる。

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \tag{3}$$

一般の３角形については正弦定理と，余弦定理が幾何構造を規定するものとして重要である。それを２つの非ユークリッド幾何とユークリッド幾何に対して整理したのが表１である。またピタゴラスの定理についてはマクローリン展開によってこれらの幾何の関係を説明している。

辺 a，b，c が小さいときにはこの展開式の第２次項だけが重要となり，双曲幾何も球面幾何もユークリッド幾何に帰一される。工科系学生および技術者に数学の構造とは何かを例示するには最も適切なものである。つまり図形の基本である３角形の辺と角



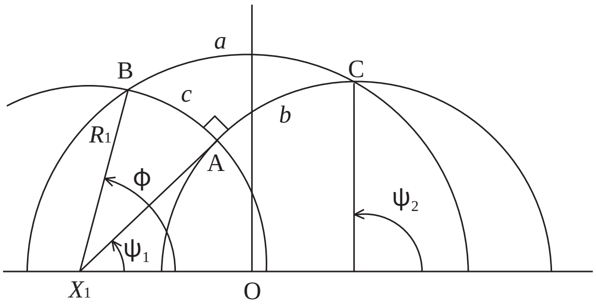


図２　ポアンカレの双曲幾何での直角３角形とピタゴラスの定理の数値計算例

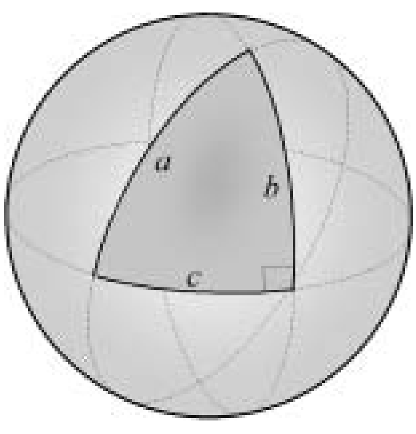
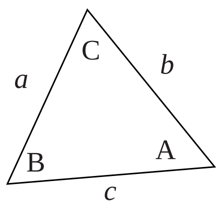
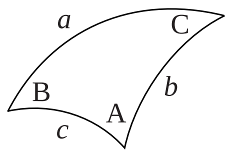
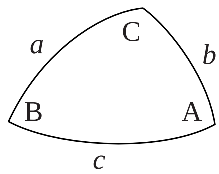


図３　球面上の３角形

の関係を規定するのが幾何構造の表現だからである。

これら２つの非ユークリッド幾何でピタゴラスの定理を誘導し，それを洞察するとき学生はアッとおどろかずにはいられないだろう。なんと，ピタゴラスの定理ばかりか，正弦定理と余弦定理が虚数 i を次のように使うことによって，２つの非ユークリッド幾何の間で入れ替わるからだ。

表１　ピタゴラスの定理と余弦・正弦定理

	ユークリッド幾何	双曲幾何	球面幾何
ピタゴラスの定理（∠Aが直角）	$a^2 = b^2 + c^2$	$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c$	$\cos a = \cos b \cdot \cos c$
第４項までのマクローリン展開	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2 + \frac{1}{12}\left(6b^2c^2 + b^4 + c^4 - a^4\right)$	$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{12}\left(6b^2c^2 + b^4 + c^4 - a^4\right)$
余弦定理	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos A$	$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$
正弦定理	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}$	$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$
３角形			
内角の和	180°	180°より小	180°より大
平行線の本数	1	∞	0

$$\cosh ix = \cos x \quad (4)$$

$$\sinh ix = i \sin x \quad (5)$$

$$\sin ix = i \sinh x \quad (6)$$

$$\cos ix = \cosh x \quad (7)$$

5．3次元および4次元への問題 － ミンコフスキー空間

ポアンカレモデルはリーマン対称空間上に実現され，高次元にも拡張できるが，本書では言及していない。そのかわり自然界にある具体例としてミンコフスキー空間を題材にした。ミンコフスキー空間はローレンツ変換によってインターバル$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$が不変となることを特徴とする実空間であり，光速不変の空間である。それは時間 t を含む４次元空間であるが，その特質は２次元(ct, x)や３次元(ct, x, y)で語ることができる。これはユークリッド空間ではないけれども，単純な非ユークリッド空間ともいえない。このあたりのことが明快に解説されている教科書は少なくとも日本語のものではなかったし，筆者らの知るかぎり英語のテキスト類にもない。本書では，単位円板に構成されるもう一つの双曲幾何を紹介し，それとポアンカレモデルとの対応関係を説明した。さらに単位円板の双曲幾何とミンコフスキー空間の関係を図４によって明示している。つまり，３次元ミンコフスキー空間を(x, y)実平面と ct 軸で構成したとき，インターバル=一定の双曲面と関連づけることによって平面上の半径１

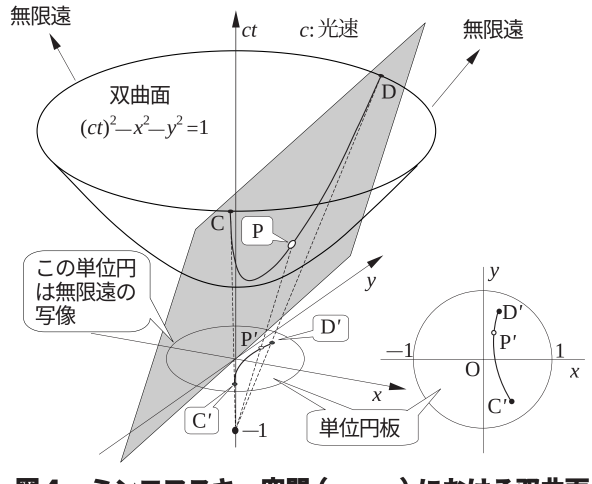


図４　ミンコフスキー空間（x, y, ct）における双曲面

の円板に双曲幾何が現れる。

直感的な類推だけによって新しい数学構造が構築できるのではなく，加えて厳密な思考と数式を用いてはじめてそれが達成できることを，この事例によってエンジニア教育に資するのがよさそうである。平面幾何では虚数 i によってsin/cosとsinh/coshとの入れ替わりが２つの非ユークリッド空間で起きたが，類似のことが，ユークリッド空間とミンコフスキー空間で起きることを指摘している。

ユークリッド平面の角 θ の回転に伴う合同変換は次のような行列で表される。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{8}$$

一方慣性系間のローレンツ変換は，光速を c，２つの慣性系間の速度を v としたとき，次の行列の表現で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \left(\xi = \tanh^{-1}(v/c)\right) \tag{9}$$

ここで，合同変換(8)の行列式は次式になる。

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{10}$$

同様にローレンツ変換(9)の行列式は次式である。

$$\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1 \tag{11}$$

ここで（10）に $\theta \to i\xi$ を適用すると（11）になり，逆に（11）に $\xi \to i\theta$ を適用すると（10）となることがわかる。合同変換が距離不変 $(x^2+y^2) = (x'^2+y'^2)$ の変換であるのに対して，ローレンツ変換がインターバル不変 $(x^2-ct^2) = (x'^2+ct'^2)$ の変換であり，その入れ替わりが虚数の使用によってなされる。

従来，論証を主体とした数学のテキストにはコンピュータを使った計算がなじまないと思われていた。しかし，本書では，このあたりに洞察を加えてローレンツ変換の計算事例などをやはりVisual Basicを使って提示してみた（図５）。

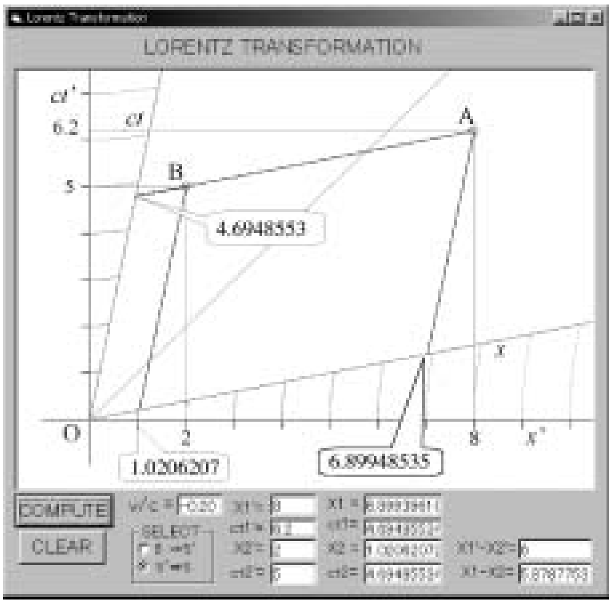


図５　ローレンツ変換の２次元可視化モデル

６．結論

日本再生に必要なのは発想力である。それには完璧性あるいは無矛盾の思考訓練が求められる。数学という学問に求められる基本的能力とは，公式を暗記したり，間違いなく四則演算の計算をしたり因数分解の難問が解ける能力ではなく，「構造」を見とおす明晰な思考力のはずである。さらに進んで新しい構造を構築する能力でもある。ここに創造性を育成するための１つの要素としての数学の重要性がある。これはかならずしも数学者の育成にかぎるものではない。新しい工業製品，農業製品を生み出したり，新しい経済理論を創出したりすることを志す人のためでもある。最近，MOT（management of technology）が重要だといわれるようになった。それは，新しい技術を正しく評価し，市場経済の仕組みのなかで効率的に活用する高度な手法である。その専門家の素養としても，新しい数学科目があってもよい。そのような目的で非ユークリッド幾何の本を編集したので，その概要を紹介した。