●教材情報

材料力学への数式処理の適用

――「真直はりの解析」教材の開発

ポリテクカレッジ北海道
(北海道職業能力開発短期大学校)　寺島　周平

1．はじめに

最近，若者の機械工学離れが増えていることに対して危機感が叫ばれている。これに対しては「きつい」「危険」「汚い」というイメージのほかに，広範な分野の科目を習得しなければならないことが一因であるように思われる。例えば，昨今では材料力学をはじめとする機械工学の４力学に加え，制御工学が５番目の基礎科目として位置づけられるようになり，学生の負担は増える傾向にある。学生は微分方程式や線形代数を完全に理解していることを想定した基礎科目の講義を受けることが多い。しかし，彼らの多くは数学を学んだことはあるが完全に理解しておらず，細かい計算に煩わされることになる。その結果，忘れてもよい計算の方法と考え方の重要なポイントを区別することが難しくなり，機械工学そのものに対する興味を失うことになる。高等数学の知識や式の変形にとらわれずに，いかに機械工学への興味を持たせ，その考え方を理解させるかという方法は，教育に携わる者の大きな課題である。

このような課題の対処法の１つとして，数式処理はすでに大きな成果をあげているようである。計算機を利用する基礎科目の演習にこれを活用することによって，短時間に考え方や応用を学ぶことができる。最近では数式処理システムを使って工業数学やデジタル信号処理を理解させるためのテキストがいくつか書かれており[1)～4)]，これらは数式処理を用いて例題を多く解いていく構成をとっている。数式処理は多くの教育機関や企業に導入されており，このような演習書は次第に増加しつつある。ところが，材料力学や構造解析の分野においては，理論の解説とFortranなどのプログラム言語を利用した演習を組み合わせた教材が最も多く見られる。しかし，学習者は常にFortranなどのプログラム言語を利用できる環境にあるとは限らない。また，プログラム言語の知識を要求するような学習方法はそれを苦手とする者にとって，本質を理解するための障害となることが多い。一方，数式処理はFortranやC言語よりも習得が容易で親しみやすい。数式処理を利用する分野において，材料力学は最も有力なもののひとつになることは確実である。

その他の活用法としては，数式処理を設計計算に用いることによって，設計作業の効率化を図ることができる。企業の設計部門では，強度計算を行い設計諸元を決定する作業がある。このような場合に，技術者は数学から離れて数年以上経ていることがほとんどであるため，計算の技術的な困難さに遭遇することが多い。しかも，手計算はファイルの形式で保存が難しく，再利用できるものではない。有限要素法に代表されるCAE（Computer Aided Engineering）ソフトウェアは導入コストがかかり，日常業務で生ずる問題の多くを解決にするには規模が大き過ぎることがある。机上の計算をより正確で，再利用のできる方法に置き換える必要があるが，このような場においても，数式処理は有用である。

本稿の目的は，数式処理を利用したはりの解析例を紹介することにある。これははりの理論を理解し，

現実の問題を解く応用力を身につけさせるために作成した教材である。筆者の知る限り，これまでに数式処理を補助手段にした材料力学の教材は見当たらない。学習者は数式処理システム上で，ここに示すいくつかのコマンドを入力するだけで，連続はりの解析を行うことができる。企業においては，材料力学の再教育を行い，はりの問題を解くことができる有力なツールになると考えられる。はじめに数式処理による基礎方程式の誘導を行い，連続はりに対する数値計算例を示す。

2．はりの曲げ問題

2.1　数式処理システムの準備

数式処理システムは現在のところ，CやFortranのようにプログラム言語としての標準化が行われていない。そのため，特定のソフトウェアに依存した形の教材を作成することになる。ここでは，Mathematicaを選んで,材料力学への応用例を示す。MathematicaはWindowsやMacintoshで動作する数式処理システムである。これには非常に多くのコマンドがある。しかし，はりの問題を解くためには基本的なコマンドを習得するだけでよい。これには文献3)，4)が適当である。このソフトウェアは関数型のプログラミングが可能であるが，ここでは微積分のできる高級な電卓として利用する。使用に際しては，PC（あるいはMacintosh）のメモリを可能な限り増設すべきである。このソフトウェアは実用に耐えうる十分な信頼性を持っている。しかし，メモリ容量が少ないパソコンでは，解こうとする問題の内容によって，動作が不安定になることがある。2.2節以降の説明では，利用者は簡単なコマンドの使い方を理解していることを仮定している。

2.2　真直はりの力学モデル

以下では，数学と数式処理のコマンド入力を対比させて，はりの解析方法[5]を説明する。数式処理を利用してはりのたわみに対する微分方程式を解き，はりのひずみエネルギの式にその解を代入する。次にポテンシャルエネルギ最小化の原理を適用して，

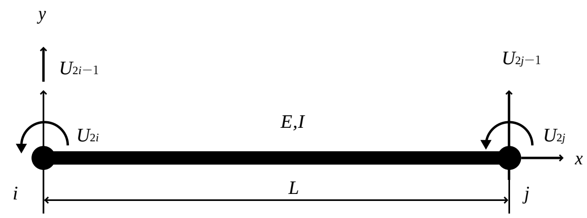

図１　水平におかれた真直はり

つりあいの式を未知変位を用いて表す。

真直はりは，その両端において垂直変位と回転の自由度を持つ自由物体として近似することができる。図１に真直はりの力学モデルを示す。はりの中立面に沿ってx軸をとる。はりの長さをL，断面の曲げ剛性をEIとする。Eはヤング率，Iは断面２次モーメントである。曲げ剛性ははり内部では一定値をとるものと仮定する。はり両端iおよびjにおける垂直方向の変位U_{2i-1}, U_{2j-1}と回転角U_{2i}, U_{2j}を未知数として考える。垂直変位の正方向はy軸に一致させる。また，断面の回転角は反時計回りを正方向にとる。真直はりの変位をベクトルとして並べたものを$\{U^{(e)}\}$のように表すと，その成分は(1)式のようになる。

$$\{U^{(e)}\}^T = [U_{2i-1}\ U_{2i}\ U_{2j-1}\ U_{2j}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

右辺の各成分は左からそれぞれ，節点iにおける垂直方向の変位と回転，および節点jにおける垂直方向変位と回転の順に並べた。外荷重ははりの対称面内に作用する集中荷重と紙面に垂直な方向の集中モーメントを考える。変位と力のベクトルの正方向は変位のそれと一致させる。ここでは“変位”や“力”はより一般的な意味を持つ。すなわち，“変位”とは垂直方向のたわみと断面の回転角を意味し，“力”は集中荷重と集中モーメントである。

Mathematicaでは(1)式右辺をひとまとまりのデータとして取り扱う。これをリストとして次のように与える。In[1]:=はプロンプトでこれは入力しない。また，入力コマンドの最後に；を付加すると出力が抑制される。

```
In [1] : = disp = {ui, ri, uj, rj};
```

はりに作用する分布荷重がないことを仮定すると，はりのたわみwに関する微分方程式は(2)式のようになる。xは，はりの中立面に沿った位置を表わす。

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

(2)式の一般解は，

$$w=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3 \quad \cdots\cdots(3)$$

c_1，c_2，c_3，c_4は積分定数である。Mathematicaでは(2)式を解くためのコマンド入力は次のようになる。この解を変数wsolに代入しておく。

```
In [2] : =
wsol = DSolve [{w ’’’’[x] = = 0} ,w [x] ,x]
  [[1, 1, 2]]
```

コマンドの最後にshift＋enterを入力すると，(3)式に対応する解が以下のように出力される。Out［3］はMathematicaからの応答である。

Out [3] = C [1] + xC [2] +x^2C [3] + x^3C [4]

この微分方程式に対して次のような４本の境界条件を考えることができる。

$$\left.\begin{array}{l} w(0)=U_{2i-1},\ \dfrac{dw}{dx}(0)=U_{2i} \\ w(L)=U_{2j-1},\ \dfrac{dw(L)}{dx}=U_{2j} \end{array}\right\} \cdots\cdots(4)$$

(4)式の境界条件に(3)式の解を代入すると，積分定数c_1，c_2，c_3，c_4に関する連立方程式は(5)のようになる。

$$\left.\begin{array}{c} c_1=U_{2i-1} \\ c_2=U_{2i} \\ c_1+c_2L+c_3L^2+c_4L^3=U_{2j-1} \\ c_2+2c_3L^2+3c_4L^2=U_{2j} \end{array}\right\} \cdots\cdots(5)$$

次に，４つの要素を持つリストlhsを用意して，(4)式の各左辺を代入する。Mathematicaでは，(5)の第１および第２式をそれぞれIn[4]，In[5]のように表す。バックスラッシュ（円記号）は継続行があることを表す。￥の後ろには改行記号（enterまたはreturn）を入力する。ここではlをはりの長さとする。

```
In [4] : = lhs = Table [0, {i, 1, 4}] ;
In [5] : = lhs [[1]] = wsol   \
/.   x −> 0;lhs [[3]] = wsol   /.   x −> 1;
```

導関数を求める組み込み関数Ｄを呼び出し，xに関するたわみの１回微分を変数dwに代入する。

```
In [6] : = dw = D [wsol, x];
```

(5)の第３および第４式を次のように表す。

```
In [7] : =
lhs [[2]] = dw   /.   x −> 0 ;
lhs [[4]] = dw   /.   x −> 1 ;
```

数式処理では，連立方程式を解くための組み込み関数Solveを呼び出し，積分定数を決定する。結果はリストcoeffに代入する。

```
In [8] : = coeff = Solve [lhs = = disp, { \
C [1] , C [2] , C [3] , C [4]}]
```

上のコマンドによって，coeffには(6)式右辺が代入されることになる。

$$\left.\begin{array}{c} c_1=U_{2i-1} \\ c_2=U_{2i} \\ c_3=\dfrac{3}{L^2}(U_{2j-1}-U_{2i-1})-\dfrac{1}{L}(2U_{2i}+U_{2j}) \\ c_4=\dfrac{2}{L^3}(U_{2i-1}-U_{2j-1})+\dfrac{1}{L^2}(U_{2i}+U_{2j}) \end{array}\right\} \cdots\cdots(6)$$

(6)式を(3)式に代入して，U_{2i-1}，U_{2i}，U_{2j-1}，U_{2j}について整理すると，

$$w=h_{2i-1}U_{2i-1}+h_{2i}U_{2i}+h_{2j-1}U_{2j-1}+h_{2j}U_{2j} \quad \cdots\cdots(7)$$

ここでh_{2i-1}，h_{2i}，h_{2j-1}，h_{2j}は補間関数と呼ばれ，(8)式のように表すことができる。

$$\left.\begin{array}{ll} h_{2i-1}=1-\dfrac{3x^2}{L^2}+\dfrac{2x^3}{L^3}, & h_{2i}=x-\dfrac{2x^2}{L}+\dfrac{x^3}{L^2} \\ h_{2j-1}=\dfrac{3x^2}{L^2}-\dfrac{2x^3}{L^3}, & h_{2j}=-\dfrac{x^2}{L}+\dfrac{x^3}{L^2} \end{array}\right\} \cdots\cdots (8)$$

Mathematicaでは，組み込み関数Collectを用いて(7)式の変形を行い，その結果をリストhmに代入する。さらに，組み込み関数Flattenを使って余分な括弧を取り除く。

```
In[9]:= hm= Collect[Simplify[\
wsol  /.  Flatten[coeff]], disp];
```

(8)式で与えられる関数をリストfとして定義する。

```
In[11]:=
f[x_]:= f[x]= Table[Coefficient[\
hm, disp[[i]]],{i, 1, 4}]
```

2．3　ひずみエネルギの定式化[5)]

連続はりは１次元の領域，すなわち線分として表すことができる。線分は複数の小さい区間に分割することができるので，この小区間を2.1における真直はりに対応させることができる。これを水平方向に連結したモデルが連続はりになる。はりの支持点と終始端，ならびに曲げ剛性EIが変化する点には未知変位を与える。また，たわみを計算する必要がある点にも未知変位をおく。未知変位を左から右へと順に番号付けする。これらの点により分割された小区間を部材と呼ぶ。部材の番号には小さい括弧(　)をつけ，変位につけた番号と区別する。

いま，m個の部材に分割された突き出しはりの全ポテンシャルエネルギπは，(9)式のように与えられる。U_iとP_iはそれぞれ，n個の節点からなる変位および力のベクトルのi成分である。

$$\pi=\sum_{e=1}^{m}\lambda^{(e)}-\sum_{i=1}^{n}P_iU_i \quad \cdots\cdots (9)$$

せん断応力の影響は無視できると仮定すると，はりのひずみエネルギは(10)式により与えられる。

$$\lambda^{(e)}=\frac{1}{2}EI\int_0^L\left(\frac{d^2w}{dx}\right)^2dx \quad \cdots\cdots (10)$$

解析的な積分を行って，(10)式右辺を計算することができる。はじめに，(8)式を位置xで微分したものをリストfddに代入する。

```
In[13]:= fdd = D[f[x], {x, 2}]
```

(1)式はxに依存しない一定値であるから，ここではあらかじめ(10)式の積分記号の外へ出してから積分の記号処理を行い，リストstiffnessに代入する。ここで，inertiaは，はりの断面２次モーメントを，youngは，はりのヤング率を表す。

```
In[14]:= stiffness = inertia  \
young Integrate[Table[\
fdd[[i]] fdd[[j]], {i, 1, 4}, \
{j, 1, 4}], {x, 0, 1}];
```

(9)式右辺第２項と(10)式をそれぞれ，関数extrenal-workとstrainenergyとして，次のように定義する。

```
In[15]:=
externalwork[p_List, di_List]:= \
p.di
In[16]:= strainenergy[di_List]: \
= 0.5 * di.stiffness.di
```

連続はりの変位U_1，U_2，U_3,…,U_{n-1}，U_nが未知であると仮定すると，ポテンシャルエネルギπの最小値は(11)式を用いて求めることができる。この式はつりあい状態にあるU_1，U_2，U_3,…,U_{n-1}，U_nに対する連立１次方程式になる。

$$\frac{\partial\pi}{\partial U_1}=0;\ \frac{\partial\pi}{\partial U_2}=0;\ldots;\ \frac{\partial\pi}{\partial U_{n-1}}=0;\ \frac{\partial\pi}{\partial U_n}=0 \quad \cdots\cdots (11)$$

2．4　内力の計算

はり解析の目的は，得られた変位を用いて各部材内力を求めることである。どのような構造解析に対しても，この計算手続きが必要である。カスティリアノの定理を用いて，求めた変位からせん断力と曲げモーメントを計算することができる。部材(e)に対するせん断力と曲げモーメントを列ベクトル$\{f^{(e)}\}$で表すと，カスティリアノの定理より(12)式が成立す

る。

$$\{f^{(e)}\}=\frac{\partial\lambda^{(e)}}{\partial\{U^{(e)}\}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$\{f^{(e)}\}$ は各部材に対して求めることになる。その各成分を次式のように定義する。

$$\{f^{(e)}\}=\begin{Bmatrix} S_i^{(e)} \\ M_i^{(e)} \\ S_j^{(e)} \\ M_j^{(e)} \end{Bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

上の式において，部材の両端i，jにおいて生ずるせん断力をそれぞれ，$S_i^{(e)}$，$S_j^{(e)}$とし，i，jに生ずる曲げモーメントをそれぞれ$M_i^{(e)}$，$M_j^{(e)}$のように表す。具体的な構造モデルを与えてから，**ポテンシャルエネルギの最小化と内力の評価に関する**数式処理を行う。図２には，正方向のせん断力と曲げモーメントに対する符号規約を示す。

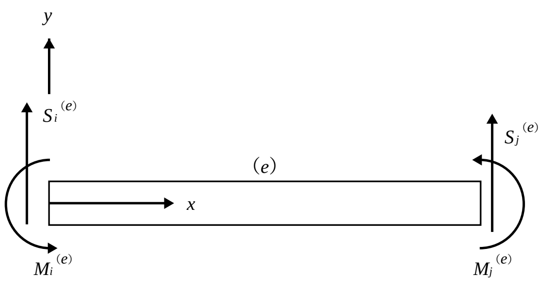

図２　はりに生ずるせん断力と曲げモーメント

３．突き出しはりの解析

図３には，２つの集中力と１つの集中モーメントが作用する突き出しはりと自由物体図を併せて示す。未知数はローラで拘束された支持点の回転量と荷重の作用点における変位である。未知変位は３つの回転と２つの垂直変位になる。変位を求める点を左から右へ1，2，3，4の順で番号づけする。変位と力はそれぞれ，U_1，…，U_8，P_1，…，P_8により与えられる。各部材は左から右へ(1)，(2)，(3)の順で番号付けをする。図３から，拘束された変位成分は$U_1=U_5=0$かつ$U_2=0$であり，集中荷重は$P_3=15(10^3)$N，$P_4=4(10^4)$Ncm，$P_7=5(10^3)$N，$P_6=P_8=0$

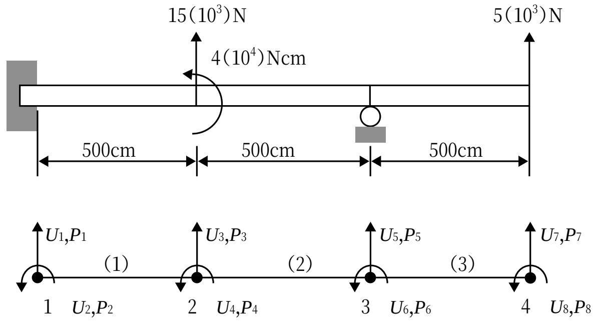

図３　突き出しはりとその自由物体

であることがわかる。

部材(1)，(2)および(3)において，各部材の変位ベクトルを４つの要素を持つリストとして表し，これらをそれぞれue1，ue2，ue3とする。

```
In[17]:= ue1 ={u1,u2,u3,u4};
ue2 ={u3,u4,u5,u6};
ue3 ={u5,u6,u7,u8};
```

ここで，断面と材料定数のデータをリストpropertyに代入する。また，拘束された変位をリストconstraintに代入して使用する。

```
In[20]:= property = \
{l-> 500,young -> 21*10^6, \
inertia-> 4000};
constraint ={u1-> 0, u2-> 0, u5-> 0};
```

このデータを用いて各部材に対するひずみエネルギを次のように計算し，その結果を変数se1，se2，se3に代入する。

```
In[22]:=
se1= strainenergy[ue1] \
/. property;
se2 = strainenergy[ue2] \
/. property;
se3 = strainenergy[ue3] \
/. property;
```

上で求めたひずみエネルギの和と外力によりなされた仕事から，この系に対する全ポテンシャルエネルギを計算し，変数ptに代入する。

```
In［25］:＝ pt ＝ se1＋se2＋se3\
－externalwork［{15 * 10 ^ 3, 4 * 10 ^ 4, \
5 * 10 ^ 3}, {u3, u4, u7}］\
/.　constraint ;
```

2．3節における(11)式を計算して，未知変位で表したつりあいの式をリストeqに代入する。

```
In［26］:＝
eq ＝{D［pt, u3］＝＝ 0, D［pt, u4］＝＝ 0, \
D［pt, u6］＝＝0, D［pt, u7］＝＝ 0, \
D［pt, u8］＝＝0};
```

組み込み関数Solveを用いて上で求めたつりあいの式を解き，その解をリストsolに代入する。

```
In［27］:＝ u ＝{u3, u4, u6, u7, u8};
sol ＝ Solve［eq, u］
```

得られた各点の変位は次のようになる。

```
Out［28］＝
{{u3－>－2.55394, u4－>－0.00321801, u7－>
8.97569, u8－> 0.0204315, u6－> 0.0129911}}
```

カスティリアノの定理(12)式を用いて，各部材に対する内力$\{f^{(1)}\}$, $\{f^{(2)}\}$, $\{f^{(3)}\}$, $\{f^{(4)}\}$ を評価する。最後に関数Flattenで余分な括弧を取り除く。

```
In［29］:＝
Flatten［Table［D［se1, ue1［[i]］］\
/.　constraint　/.　sol, {i, 1, 4}］］
Flatten［Table［D［se2, ue2［[i]］］\
/.　constraint　/.　sol, {i, 1, 4}］］
Flatten［Table［D［se3, ue3［[i]］］\
/.　constraint　/.　sol, {i, 1, 4}］］
```

3つの部材の内力はそれぞれ4つの要素を持つリストとしてその結果が返される。Out［29］からOut［31］の各要素の並びは**(13)式のそれ**と同じである。

```
Out［29］＝
{14107.5,  4.0675 10^6,－14107.5,  2.98625 10^6}
Out［30］＝
{－892.5, －2.94625 10^6,  892.5,  2.5 10^6}
Out［31］＝
{－5000., －2.5 10^6, 5000.,  3.72529 10^-9}
```

4．おわりに

数式処理を材料力学の分野へ応用する一例として，連続はりを解析する方法を紹介した。本稿で示した入力コマンドは教育訓練を目的とした教材として有用であるばかりでなく，設計者の身近な設計ツールとしても活用することができる。数式処理は，材料力学の理論的内容を理解するための効果的な手段であり，これを利用することにより次の効果が期待できる。

①　数学から離れて数年以上経た設計者でも，正確かつ迅速に強度計算を行うことができる。
②　設計計算の途中経過をインタラクティブに確認することができる。
③　コマンド列や計算の結果をファイルの形式で保存し，必要なときに再利用することができる。
④　本稿で示した入力コマンドは，身近にあるPCで利用することができる。結果として，CAEの導入に比べると必要な投資を低く抑えることができる。
⑤　数式処理を通して，使用者が材料力学に対する親しみを持つことができる。

〈参考文献〉

1）D. C. M. Burbulla, C. T. J. Dodson : Mathematica　微積分入門，トッパン，1992.
2）小野：Mathematica DSPと制御，トッパン，1992.
3）M. I. Abell, J. P. Braselton : Mathematica By Example, Academic Press, 1994.
4）J. S. Robertson, 下地　他訳：Mathematicaによる工科系数学，共立出版，1996.
5）L. J. Segerlind : Applied Finite Element Analysis, 225-271, Wiley, 1984.